既習事項のまとめ

(1) 群の定義 : 集合 G に演算 $G \times G \to G : (a, b) \mapsto ab$ が与えられていて, 次の 3 条件を全て満たすとき G を <u>群</u> と呼ぶ ;
(G1) この演算は結合法則をみたす,
(G2) 単位元 1 を持つ,
(G3) 各元 $a \in G$ に対して逆元 a^{-1} が存在する.

(2) 群 G の部分集合 $H \subset G$ が <u>部分群</u> であるとは, G の演算について
(SG1) $a, b \in H \implies ab \in H$
(SG2) $a \in H \implies a^{-1} \in H$
が成り立つことである.

(3) 記号 $H < G$ または $G > H$ は, G が群であり, H はその部分群であることを表すものとする.

(4) 群 G <u>位数</u> とは集合としての G の元の個数のことで $|G|$ と書かれる.

(5) 群 G が <u>アーベル群</u> とは任意の $a, b \in G$ について $ab = ba$ が成り立つことをいう. アーベル群の演算を $+$ で表して, そのアーベル群を <u>加群</u> と呼ぶことがある.

(6) 群 G と $a \in G$ について, a^j $(j \in \mathbf{Z})$ の全体は G の部分群である. これを $\langle a \rangle$ で表す.
1 つの元 a でもって $\langle a \rangle$ と書かれる群を <u>巡回群</u> と呼ぶ.

(7) 群 G の要素 a の <u>位数</u> とは $\langle a \rangle$ の (群としての) 位数のことで, これを $o(a)$ と記す. これは $g^m = 1$ となる最小の正の整数 m のことである. その様な m が存在しないとき g の位数は ∞ であるといい, $o(a) = \infty$ と書く.

(8) G の部分群 H による <u>左剰余類</u> とは, 同値関係 $g_1 \equiv_\ell g_2 \bmod H$ (${g_1}^{-1} g_2 \in H$ で定義) で分類した類のことで, g_1 の属する類は $g_1 H$ である. 右剰余類 ($\equiv_{\mathrm{r}}$ で分類) も同様.

(9) $n | m$ は整数 n が整数 m を割り切ること, つまり m が n の倍数であることを意味する.

(10) $GL(n, \mathbf{Q}) = \{ A \mid A$ はすべての成分が有理数である n 次正方行列で $\det(A) \neq 0 \}$. これは行列の積を演算として群をなす.

(11) n 次対称群 (n 次置換の全体) S_n は互換の全体で生成される.

宿題の未提出者へ : 試験範囲の問題 (= 今まで宿題として課した問題) のすべてをレポートにまとめるて早急に提出せよ. ただし, わからない点があればそれを明確にして質問を記述する.

実施：2013 年 12 月 9 日 (月) 10:40-12:10, LC-13 室

「群の構造」中間試験問題兼解答用紙

(2013 年度, 後期, 月曜 2 時限, 科学教育コース, 数学教育系 2 年)

試験時間 80 分,　教科書: 永尾 汎 著 「代 数 学」

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 11:40 の時点の一回限りとする.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (15 点) 群 G の任意の元 x に対して $x^2 = 1$ が成り立てば, G はアーベル群であることを証明せよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (15 点) 群 G の空でない部分集合 H が有限集合であるとき, $HH \subset H$ ならば H は部分群であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (15 点) H, K は群 G の 2 つの部分群とする. このとき次を示せ.
HK が G の部分群 $\iff$ $HK = KH$.

学籍番号	氏名	点

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点)　群 G の, その部分群 H による右分解を $G = \sum_{i \in I} Ha_i$ とする. このとき G の H による左分解が $G = \sum_{i \in I} {a_i}^{-1}H$ で与えられることを示せ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (20 点)　n 次対称群 S_n は $\{(1,2),\ (2,3), \cdots, (i, i+1), \cdots,\ (n-1, n)\}$ で生成されることを示せ. ただし, S_n が互換の全体で生成されることは既知としてよい.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (20 点)　4 次対称群 S_4 の 24 個の元を部分群 $V = \{\,1,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\,\}$ で右分解し, 6 つの右剰余類の元をそれぞれ明記せよ.

(ここより下には記入しないで下さい)