

記号 $[a_{ij}]$ の使用法の練習

一般に 2 つの行列 $[g_{ij}]_{m \times n}$ と $[h_{jk}]_{n \times r}$ の積をこの記号で書けば

$$[g_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} [h_{jk}]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq r}} = \left[\sum_{\substack{\square=1 \\ \square=1}}^{\square} g_{i\square} h_{\square k} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}}$$

例題 1. $A(B + C) = AB + AC$ を証明せよ.

証明. いま

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad B = [b_{jk}]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq r}}, \quad C = [c_{jk}]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq r}}$$

とおく. これらについて,

$$\begin{aligned} A(B + C) &= A[b_{jk} + c_{jk}]_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq r}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\square} a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\square} (a_{ij} b_{jk} + a_{ij} c_{jk}) \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\square} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{\square} a_{ij} c_{jk} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\square} a_{ij} b_{jk} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}} + \left[\sum_{j=1}^{\square} a_{ij} c_{jk} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}} \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

例題 2. $(AB)C = A(BC)$ を証明せよ.

証明. 先ほどと同様に,

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{\square k} \\ 1 \leq \square \leq \square \\ 1 \leq k \leq r \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{\square t} \\ 1 \leq \square \leq \square \\ 1 \leq t \leq \ell \end{bmatrix}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} [a_{ij}] & [b_{\square k}] \\ 1 \leq i \leq m & 1 \leq \square \leq \square \\ 1 \leq j \leq n & 1 \leq k \leq r \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{\square t} \\ 1 \leq \square \leq \square \\ 1 \leq t \leq \ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} b_{\square} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\square t} \\ 1 \leq \square \leq \square \\ 1 \leq t \leq \ell \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{\square=1}^{\square} \left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} b_{\square} \right) c_{\square} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\square=1}^{\square} \left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} b_{\square} c_{\square} \right) \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{bmatrix} a_{ij} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [b_{\square k}] & [c_{\square t}] \\ 1 \leq \square \leq \square & 1 \leq \square \leq \square \\ 1 \leq k \leq r & 1 \leq t \leq \ell \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{\square=1}^{\square} b_{\square} c_{\square} \\ 1 \leq \square \leq \square \\ 1 \leq k \leq r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} \left(\sum_{\square=1}^{\square} b_{\square} c_{\square} \right) \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\square=1}^{\square} \left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} b_{\square} c_{\square} \right) \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$x_{\square} = a_{ij} b_{\square} c_{\square}$$

とおけば等式 (別紙参照)

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^r x_{\square} \right) = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^n x_{\square} \right)$$

から

$$(AB)C = A(BC)$$

がわかり, 所望の等式が成り立つことがわかる.