(p.107) **問 8** グルサ (Goursat) の公式の証明に必要な

> **定理 10** $C$ は Jordan 曲線群で, 関数 $\varphi(\zeta)$ は $C$ 上の連続関数とする. $C$ が囲む領域 $D_C$ 上の変数 $z$ について
>
> $$g(z) = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$
>
> とおく. このとき $g(z)$ は正則であり, しかも何度も微分できて
>
> $$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
>
> が成り立つ.

を一般の $n$ について証明せよ.

**証明** (L.V. Ahlfors : Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company から) $C$ 上の一般の函数 $\psi(\zeta)$ に対し, 記号,

$$g^{(n)}(\psi; z) = \frac{n!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

を用意しておく. $\psi(\zeta)$ が元々の $\varphi(\zeta)$ のときは, $g^{(n)}(\varphi; z) = g^{(n)}(z)$ と略記する. いま, 自然数 $k$ を取り, $n \leqq k$ なる $n$ についてはいつも定理が正しいと仮定する. このとき

$$\begin{aligned}
g^{(k)}(z+h) - g^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{k+1}} d\zeta - \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \\
&= \left\{ \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{k+1}} d\zeta - \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{k}(\zeta - z)} d\zeta \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{k}(\zeta - z)} d\zeta - \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right\} \quad \text{(同じもの (青色部分) を引いて足した)} \\
&= h \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}}{(\zeta - z - h)^{k+1}} d\zeta + \left\{ \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}}{(\zeta - z - h)^{k}} d\zeta - \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}}{(\zeta - z)^{k}} d\zeta \right\} \\
&= h g^{(k)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}; z+h\right) + k \left\{ g^{(k-1)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}; z+h\right) - g^{(k-1)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}; z\right) \right\}
\end{aligned}$$

これより

$$\frac{g^{(k)}(z+h) - g^{(k)}(z)}{h} = g^{(k)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}; z+h\right) + k \frac{g^{(k-1)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}; z+h\right) - g^{(k-1)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}; z\right)}{h}$$

帰納法の仮定から $n = k-1$ の場合の $g^{(k-1)}(\tfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}; z)$ は正則であつて, それの導関数は $g^{(k)}(\tfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}; z)$ である. ここで, 導関数の定義から $h \to 0$ のとき 上記の後ろの項は $g^{(k)}(\tfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}; z)$ に収束する. また, やはり帰納法の仮定から $g^{(k)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}; z\right)$ は連続関数であるから, $h \to 0$ のとき, 前の項 $g^{(k)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}; z+h\right)$ は $g^{(k)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}; z\right)$ に収束する. よつて

$$\begin{aligned}
g^{(k+1)}(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{g^{(k)}(z+h) - g^{(k)}(z)}{h} = g^{(k)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}; z\right) + k g^{(k)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}; z\right) \\
&= (k+1) g^{(k)}\left(\tfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)}; z\right) = (k+1) \frac{k!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta = \frac{(k+1)!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta
\end{aligned}$$

となつて証明が終る. □