(p.11)

問 7　a, b を与へられた二つの複素数とする.

(1) どのやうな複素数 z 対しても　$z\overline{z}+az+b\overline{z}+1$ がつねに実数であるための条件を a, b を用いて表せ.

(2) どのやうな複素数 z に対しても, $z\overline{z}+az+b\overline{z}+1 \geqq 1$ がつねに成り立つやうな $|a|$ の範囲を求めよ.

(解答の hint)　一般に

$$\alpha \text{ が実数} \iff \alpha=\overline{\alpha}$$

であるから, 求める必要十分条件は

$$z\overline{z}+az+b\overline{z}+1=\overline{z}z+\overline{az}+\overline{b}z+1.$$

つまり

$$(a-\overline{b})z+(b-\overline{a})\overline{z}=0.$$

これは

$$\begin{cases} a-\overline{b}=0 \\ b-\overline{a}=0 \end{cases}$$

のとき, 且そのときに限つて成り立つ. つまり, 求める条件は $a=\overline{b}$.

(2)　左辺は実数なので (1) より $a=\overline{b}$. このとき

$$\begin{aligned} z\overline{z}+az+b\overline{z}+1 &= z\overline{z}+az+\overline{az}+1 \\ &= (z-\overline{a})(\overline{z}-a)+\boxed{}. \end{aligned}$$

...