問 10 二つの複素数 z_1，z_2 について，次の不等式が成り立つことを示せ：

$$||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|.$$

さらに一般に，n 個の複素数 z_k（$k = 1$，2，$\cdots$，n）について

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

が成り立つことを示せ.

（**解答の hint**） 【まず，O(0)，A(z_1)，B(z_2) として △OAB を考へ，説明して下さい．その上で】$z_1 = a + bi$，$z_2 = c + di$ として

$$\begin{aligned}
(\text{右辺})^2 - (\text{中辺})^2 &= (|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 \\
&= (|z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2) - (|z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|)^2) \\
&= 2|z_1 z_2| - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 \\
&= 2(|z_1\overline{z_2}| - \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})) \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

を計算すれば（$z_1\overline{z_2} = a + bi$ として計算すれば）わかる．中辺と左辺についても同様．

後半は数学的帰納法でできる．但し，$n + 1$ 個の場合を証明するのに 2 個の場合と n 個の場合を併用する必要がある．