実施 2009.7.10, 3-4 校時

《複素解析》期末試験 ① 問題兼解答用紙

(2009 年度, 金曜 3·4 校時, 情報システム工学科, 2 年生)

試験時間 80 分,　教科書: 佐藤/吉田 初歩から学べる「複素解析」

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 11:30 の時点の一回限りとする.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (15 点) 方程式 $z^4 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ を解け.

答は $\pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\pm\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ の **4 つ**.

・$z = x + yi$ とおいて解くのは大変だ.
・極形式で求めるのが良い.
・ひとつの解 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を見付ければ, 他の 3 つは,
　これを 1 つの頂点とした単位円に内接する正方形の残りの頂点だ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (15 点) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^i$ の値を求めよ.

(与式) $= e^{i\log\frac{1-i}{2}} = e^{i(\mathrm{Log}1+(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)i)} = e^{\frac{\pi}{4}-2n\pi}$　(n は整数)
・無限個の答になつてゐなければ不可.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (20 点) 積分 $\displaystyle\int_{|z-i|=3}\frac{\sin z}{(z-i)^2}dz$ を求めよ.

グルサの定理より

$$\frac{1!}{2\pi i}(\text{与式}) = (\sin z)'|_{z=i} = \cos i = \frac{e^{-1}+e}{2}$$

よつて, 答は $\pi i\,(e^{-1}+e)$.

・$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ を使つて欲しかつたが, $2\pi i\cos i$ も可とした.
・グルサの公式の $2\pi i$ に留意してゐない場合は不可.

学籍番号	氏名	点

$\boxed{4}$ (25 点) 関数 $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ を $z=0$ を中心に $1<|z|<2$ でローラン展開せよ.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\Big) \\
&= -\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3z}\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} \\
&= -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z}{2}\Big)^n - \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{z}\Big)^n \\
&= -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z}{2}\Big)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{z}\Big)^{n+1} \qquad \cdots\cdots \quad \text{Ans.}
\end{aligned}
$$

・完答のみ得点.
・最終の答の書き方は, 本質的なところを外してゐなければ OK.

$\boxed{5}$ (25 点) (**選択問題**) 次の積分のいずれかを留数計算に帰着させて求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+2}{x^4+5x^2+4}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta \quad (0<a<1)$

(1) 関数 $f(z) = \dfrac{z^2+z+2}{z^4+5z^2+4} = \dfrac{z^2+z+2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ の上半平面における特異点は $z=i$ と $z=2i$ のみである.

$$\mathrm{Res}(i) = \frac{1-i}{6}, \quad \mathrm{Res}(2i) = \frac{-1-i}{6}$$

なので教科書の様に半円 C_R と線分 I_R 上の積分が

$$\int_{C_R+I_R} f(z)dz = 2\pi i\,\big(\mathrm{Res}(i)+\mathrm{Res}(i)\big) = \frac{2}{3}\pi$$

・ここで $R\to\infty$ のときに $\int_{C_R}\to 0,\ \int_{I_R}\to$ (与式) となることをきちんと述べること.

$$\frac{2}{3}\pi \quad \cdots \quad \text{Ans.}$$

(2) 教科書 p.151, 問 5 (2) に他ならないので, 教科書を参照されたい.

(ここより下は記入しないで下さい)