

(p.41)

問 1 $w = \lambda \cdot \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ ($|\lambda| = 1, \operatorname{Im} a > 0$) が上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ を単位円 $|w| < 1$ にうつすことを示せ.

(解答の hint) z について解くと

$$z = \frac{\bar{a}w - \lambda a}{w - \lambda}.$$

よつて, $|\lambda| = 1$ を使ひながら計算すると

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} z &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\bar{a}w - \lambda a}{w - \lambda} - \frac{a\bar{w} - \bar{\lambda}\bar{a}}{\bar{w} - \bar{\lambda}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(\bar{a}w - \lambda a)(\bar{w} - \bar{\lambda}) - (a\bar{w} - \bar{\lambda}\bar{a})(w - \lambda)}{|w - \lambda|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(\bar{a} - a)(|w|^2 - 1)}{|w - \lambda|^2} \\ &= -\operatorname{Im} a \frac{|w|^2 - 1}{|w - \lambda|^2}.\end{aligned}$$

これが > 0 といふことは

$$|w|^2 - 1 < 0,$$

つまり

$$|w| < 1$$

と同値である. よつて $\operatorname{Im} z > 0$ の像は $|w| < 1$.