

(p.43)

問 4 次の極限值が存在するか. 極限值が存在するときはそれを求めよ.

$$(2) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^a}{z} \quad (a > 0)$$

(解答の hint) $z = re^{i\theta}$ とおくと

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^a}{z} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{|re^{i\theta}|^a}{re^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{r^{a-1}}{e^{i\theta}}.$$

ここで

$$\lim_{r \rightarrow +0} r^{a-1} = \begin{cases} \infty & (0 < a < 1) \\ 1 & (a = 1) \\ 0 & (1 < a) \end{cases}$$

なので, $a > 1$ のときのみ極限值が存在して $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^a}{z} = 0$.