(p.48)

問 7 次の関数はどのやうな点で微分可能か.
(1)　$f(z) = |z|$.

(解答の hint)　$z = 0$ においては易しい.
$z_0 \neq 0$ においては,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{|z_0+h| - |z_0|}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{|z_0+h|^2 - |z_0|^2}{h(|z_0+h| + |z_0|)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)(\overline{z_0+h}) - {r_0}^2}{h\cdot 2|z_0|)} \\
&= \frac{1}{2|z_0|} \lim_{h\to 0} \frac{|z_0|^2 + h\overline{z_0} + \overline{h}z_0 - {r_0}^2}{h} \\
&= \frac{1}{2r_0} \lim_{h\to 0} \frac{{r_0}^2 + h\overline{z_0} + \overline{h}z_0 - {r_0}^2}{h} \\
&= \frac{1}{2r_0} \lim_{r\to +0} \frac{re^{i\theta}r_0e^{-i\theta_0} + re^{-i\theta}r_0e^{i\theta_0}}{re^{i\theta}} \\
&= \lim_{r\to +0} \frac{e^{i\theta}e^{-i\theta_0} + e^{-i\theta}e^{i\theta_0}}{e^{i\theta}} \\
&= \frac{e^{i(\theta-\theta_0)} + e^{-i(\theta-\theta_0)}}{e^{i\theta}} \\
&= (e^{i(\theta-\theta_0)} + e^{-i(\theta-\theta_0)})e^{-i\theta} \\
&= 2\cos(\theta-\theta_0)(\cos\theta - i\sin\theta).
\end{aligned}
$$

ここで $\theta = 0$ と固定しておき，$\theta_0 = 0$ の場合と $\theta_0 = \pi$ の場合を比較してみよ.