

(p.54)

**問 15**  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  ( $z = re^{i\theta}$ ),  $u(r \cos \theta, r \sin \theta) = u(r, \theta)$  とおくとき (2.11) (= Cauchy-Riemann の関係式) は

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$$

と同値であること, また

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \left(\frac{e^{-i\theta}}{r}\right)(v_\theta - iu_\theta)$$

とかけることを示せ.

(解答の hint) [前半]. 微分積分学 (偏微分の公式) より

$$(1) \quad \begin{cases} u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ u_\theta = u_x(-r \sin \theta) + u_y \cos \theta \\ v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ v_\theta = v_x(-r \sin \theta) + v_y \cos \theta \end{cases}$$

である. これを証明したい 2 式の左辺と右辺に代入して計算すると, 左辺と右辺が一致することがわかる.

[後半]. 同様に与式の右辺に上の式を代入し

$$u_x + iv_x (= f'(z)) \quad (\text{教科書, p.52, } l.-2)$$

となることを確かめれば良い.

(別解)

(この方法は, 与式が与へられてみなくて  $u_r$  と  $u_\theta$  の関係式を求めよ, といふ問題であつてもできる.)

[前半]. 上記の (1) を  $u_x, u_y$  および  $v_x, v_y$  について解くと (つまり  $u_x$  や  $u_y$  を  $u_r, u_\theta$  で表し,  $v_x$  や  $v_y$  を  $v_r, v_\theta$  で表すと),

$$(2) \quad \begin{cases} u_x = u_r \cos \theta - u_\theta r^{-1} \sin \theta, \\ u_y = u_r \sin \theta + u_\theta r^{-1} \cos \theta, \\ v_x = v_r \cos \theta - v_\theta r^{-1} \sin \theta, \\ v_y = v_r \sin \theta + v_\theta r^{-1} \cos \theta. \end{cases}$$

これを Cauchy-Riemann の関係式に代入する. さらに, そこから  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  を消去すれば,  $u_r$  と  $u_\theta$  についての所望の 2 式が得られる.

[後半]. 上の (2) を

$$f'(z) = u_x + iv_x \quad (\text{教科書, p.52, } l.-2)$$

などに代入すれば良い.