(p.66)

問 25 対数関数 $f(z) = \log|z| + i \arg z$ は, 例えば, $D = \{z \mid z \neq 0, -\pi < \arg z < \pi\}$ で正則であつて, $f'(z) = \frac{1}{z}$ であることを示せ (問 15 を用いよ).

(**解答の hint**) $f(z) = u + iv$, $z = re^{i\theta}$ とおく.

$$f(z) = \log|z| + i \arg z$$

から

$$u = \log r, \quad v = \theta$$

である. このとき D で

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\cdot 1 = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= 0 = -r\cdot 0 = -r\frac{\partial v}{\partial r}.\end{aligned}$$

なので, 問 15 の前半より, $f(z)$ は D で正則である. また 問 15 の後半から

$$\begin{aligned}f'(z) &= e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\\ &= e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i\cdot 0\right)\\ &= \frac{1}{re^{i\theta}}\\ &= \frac{1}{z}.\end{aligned}$$