(p.72)

6. f を領域 D で正則とする．次のいづれの場合にも f は D で定数であることを証明せよ． (1) $\mathrm{Re}f = c$ （定数） (2) $|f| = c$ （定数）

（解答の hint） (1) 仮定より $f = c + iv$ の形である．これに Cauchy-Riemann の関係式を適用すると

$$\begin{cases} 0 = v_y \\ 0 = -v_x \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases}$$

である．これより $v = d$ （定数）となることがわかる．よつて $f = c + di$ （定数）となる．
(2) $|f| = c$ のとき $f = c(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ と書ける．ただし $\varphi = \varphi(x, y)$ である．このとき Cauchy-Riemann の関係式は

$$-\varphi_x \sin\varphi = \varphi_y \cos\varphi,$$
$$\varphi_x \cos\varphi = \varphi_y \sin\varphi$$

となるが，これより

$$-\varphi_x \sin^2\varphi = \varphi_y \cos\varphi \sin\varphi = \varphi_x \cos^2\varphi$$

ゆゑに

$$\varphi_x \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 0.$$

よつて $\varphi_x = 0$. 同様に $\varphi_y = 0$ も示せる.