May 14, 2014

北岡 他 著：『工科系の微分積分学の基礎』 の節末問題の解答例

解答のところに * と page を付けたものは演習書のその page に解答例が記載されている.

問題 1.2 [A]

2. 次の数列は増加することを示し, 上の限界があるかどうか調べよ.

数列 $\{a_n\}$ の上の限界とは, すべての整数 $n > 0$ について $a_n < M$ となる様な数 M のことである.

(1) $\left\{\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{n}{n(n+1)}\right\}$

解 $\frac{1}{n(n+1)} > 0$ なので増加する. また

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\\ &< 1\end{aligned}$$

なので 1 はひとつの上の限界である.

(2) $\left\{\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}\right\}$

解 $\frac{1}{n^2} > 0$ なので増加する. また

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\\ &= 2 - \frac{1}{n}\\ &< 2\end{aligned}$$

なので 2 はひとつの上の限界である.

(3) $\left\{\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right\}$

解 1 $\frac{1}{n} > 0$ なので増加する. さて, $x > 0$ において, 関数 $\frac{1}{x}$ は単調減少なので

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}$$

が成り立つ. これを利用すると,

$$(\text{与式}) > \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \log(n+1) \longrightarrow +\infty.$$

よって上の限界はない.

解 2 $\frac{1}{n} > 0$ が正なので増加する. いま, 整数 $m > 0$ について

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}-1} = \quad & \frac{1}{1} \\ & +\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \\ & +\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) \\ & +\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{15}\right) \\ & +\cdots \\ & +\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m+1}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}-1}\right)\end{aligned}$$

と書き直してみる. この第 ℓ 番目の部分和は 2^ℓ 個の項からなり,

$$\begin{aligned} > \ & \frac{1}{1} \\ & +\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \\ & +\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \\ & +\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right) \\ & +\cdots \\ & +\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right) \\ = \ & 1 \\ & +1 \\ & +1 \\ & +1 \\ & +\cdots \\ & +1 \\ = \ & m+1 \longrightarrow \infty \quad (m \longrightarrow \infty \text{ のとき})\end{aligned}$$

このことは, この数列には上の限界がないことを意味する.

問題 1.2 [B]

1. 極限の厳密な定義にしたがって

(1) すべての自然数 n に対して $a_n = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ.

解 (* p.32) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N = 1$ とおくと,

$$\text{任意の } n > N \text{ について, } |a_n - 0| (= 0) < \varepsilon$$

が成り立つ. よって $\{a_n\}$ は 0 に収束する.

(2) $a_n = 0.999\cdots 9 = 1 - \dfrac{1}{10^n}$ とすると $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ であることを示せ.

解 (* p.33) 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 N を $\dfrac{1}{10^N} < \varepsilon$ となる様に取れ. このとき $n > N$ ならば

$$|a_n - 1| = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^N} < \varepsilon.$$

よって $\{a_n\}$ は 1 に収束する.

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対し $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ (平均) とおく. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ なら $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ となることを示せ.

解 (* p.33) 収束の定義から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 N があって,

$$\text{任意の } n > N \text{ について, } |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ. このとき, $n > N$ ならば

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| \\
&= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\
&< \left| \frac{a_1 - a}{n} \right| + \left| \frac{a_2 - a}{n} \right| + \cdots + \left| \frac{a_n - a}{n} \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{n} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

これは $\{b_n\}$ が a に収束することを意味する.

(4) 最後に論理の練習として, 収束しないことが次の様に述べられることを確認せよ. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束しないとは, ある正数 ε に対して次の命題 $Q(\varepsilon)$ $(= P(\varepsilon)$ の否定$)$ が成立することである.

$|a_n - a| \geqq \varepsilon$ となるいくらでも大きい自然数 n がある, すなわち, どんな自然数 N に対しても $|a_n - a| \geqq \varepsilon$ となる自然数 $n > N$ がある.

解 これは p.11 の脚注に従えばよい.

問題 1.3 [B]

1. 厳密な定義 (大黒柱 II) にしたがって, $f(x)=x$ が $\mathbb{R}$ で連続なことを示せ.

(**証明**) 任意に $a\in\mathbb{R}$ を取り固定する. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, 大黒柱 II の δ として ε そのものを取れ. このとき, $|x-a|<\varepsilon$ ならば, もちろん $|f(x)-f(a)|<\varepsilon\,(=\delta)$. よつて, $f(x)=x$ は a で連続である. つまり, $\mathbb{R}$ の至るところで連続である.

2. 関数 $f(x)$ が $a\in D$(定義域) で連続でないとは, 次の主張が成立することであることを確認せよ :
ある正数 ε に対して, どんな正数 δ をとっても
$x\in D$ かつ $|x-a|<\delta$ と $|f(x)-f(a)|\geqq\varepsilon$ を満たす x がある.

(**解**) p.11 の脚注 3 に従つて連続の定義の否定文を書けばよい.

3. $\{a_n\}$ を上に有界な単調増加数列とする. $D=\{a_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$ とおくと定理 1.3 の $\sup D$ に対し, $\lim_{n\to\infty}a_n=\sup D$ となることを示し, 定理 1.2 を証明せよ.

(**証明**) 定理 1.3 により $\sup D$ は存在する. 定理 1.3 の 1 の (ii) より, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\sup D-\varepsilon<a_N$ となる番号 N がある. $\{a_n\}$ は単調増加であるから, このとき, すべての $n\geqq N$ について $\sup D-\varepsilon<a_n$, 即ち, $\sup D-a_n<\varepsilon$ である. 定理 1.3 の 1 の (i) より, $\sup D-a_n\geqq 0$ であるので, これら 2 つの不等式より, 特に $|\sup D-a_n|<\varepsilon$ である. つまり $\{a_n\}$ は $\sup D$ に収束する.

【参 考 書】

① 三村 征雄 著 :『大学演習 微分積分』, 裳華房 (だいたいの演習問題のネタはこの本にある)
② 遠山 啓 著 :『数学入門 (下巻)』, 岩波新書, 第 X 章, pp.61-78 (収束の定義を理解するには最適)
③ 高木 貞治 著 : 『解析概論』, 岩波書店, (これの 付録 I に実数の構成が述べられている)
④ 石谷 茂 著 :『∀ と ∃ に泣く』, 現代数学社 (論理について学ぶには好著)
⑤ 石谷 茂 著 :『ε-δ に泣く』, 現代数学社 (これの p.69 まで)

問題 1.6 [A]

2 定理 1.13 (平均値の定理) は次のようにも表せることを示せ.
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で開区間 (a,b) で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a+b(b-a)\theta)$$

となる θ $(0<\theta<1)$ がある.

解 いま

$$\theta=\frac{c-a}{b-a}$$

とおくと

$$c=a+(b-a)\theta$$

なので, $a<c<b$ は $0<\theta<1$ と同値である. よって平均値の定理は上の様に書き直される.

以下の問題では x^α ($\alpha\in\mathbb{R}$ は定数) の微分を使うが, これは, 教科書ではまだ登場していないので良くない.(と担当の私 (大西) は思う.)

3 正数 a, b に対し次の関数の最大値, 最小値 (もしあれば) を求めよ.
(1) $x^a(1-x)^b \quad (0\leqq x\leqq 1)$

解 (* p.42) $f(x)=x^a(1-x)^b$ とおくと

$$f'(x)=ax^{a-1}(1-x)^b-a^bb(1-x)^{b-1}=x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a(1-x)-bx)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a-(a+b)x).$$

これが 0 となるのは $x=\frac{a}{a+b}$ のときで増減表を書いてみれば $x=\frac{a}{a+b}$ で最大となることがわかる. 最大値は $f(\frac{a}{a+b})=(\frac{a}{a+b})^a(\frac{b}{a+b})^b=\frac{a^ab^b}{(a+b)^{a+b}}$. また $f(0)=f(1)=0$ なので最小値は 0 である.

(2) x^a+x^{-b} (x>0)

解 (* p.42) $f(x)=x^a+x^{-b}$ とおく. 導函数は

$$f'(x)=ax^{a-1}-bx^{-b-1}.$$

$f'(x)=0$ となるのは $ax^{a-1}-bx^{-b-1}=0$, つまり

$$ax^{a-1}=bx^{-b-1},$$
$$x^{a+b}=\frac{b}{a},$$
$$x=(\tfrac{b}{a})^{\frac{1}{a+b}}$$

このとき $f(\frac{1}{a+b})=(\frac{1}{a+b})^{\frac{a}{a+b}}+(\frac{1}{a+b})^{\frac{-b}{a+b}}$ で,

$$x<(\tfrac{b}{a})^{\frac{1}{a+b}} \iff x^{a+b}<\frac{b}{a} \iff ax^{a-1}<bx^{-b-1} \iff f'(x)<0$$

なので, $f(x)$ は $x<(\frac{b}{a})^{\frac{1}{a+b}}$ で減少し, $x>(\frac{b}{a})^{\frac{1}{a+b}}$ で増加する. よつて $x=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{a+b}}$ で最大値

$$(\tfrac{1}{a+b})^{\frac{a}{a+b}}+(\tfrac{1}{a+b})^{\frac{-b}{a+b}}$$

をとる. 開区間 $(0,\infty)$ が定義域なので, 最大値はない.

4. $x>1$ のとき次の不等式を区間 $[1,x]$ で平均値の定理を用いて証明せよ.
(1) $x^p-1<p(x-1)$ $(0<p<1)$

解 (* p.42) 関数 $f(x)=x^p$ について区間 $[1,x]$ で平均値の定理を用いることで

$$\frac{x^p-1}{x-1}=pc^{p-1}$$

となる $1<c<x$ が存在することがわかる. $0<p<1$ ゆえ, $c^{p-1}<1$ であるから,

$$\frac{x^p-1}{x-1}<p.$$

よって

$$x^p-1<p(x-1).$$

(2) $x^p-1<p(x-1)$ $(p>1)$

解 (* p.42) (1) と同様.

5. $f(x)$ は $x\geqq 0$ で連続, $x>0$ で微分可能で $f(0)=0$, $|f'(x)|<a$ ($a>0$ を満たすとき, $-ax<f(x)<ax$ を示せ.

解 $f(x)$ について区間 $[0,x]$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{f(x)-0}{x-0}=f'(c)$$

となる $0<c<x$ が存在する. 仮定より

$$-a<f'(c)<a$$

であるから

$$-a<\frac{f(x)}{x}<a,$$
$$\therefore -ax<f(x)<ax.$$

問題 1.6 [B]
1. $a>0$, $b>0$, $0\leqq\lambda\leqq 1$ とするとき, $\lambda a+(1-\lambda)b\geqq a^\lambda b^{1-\lambda}$ を示せ.

証明 (* p.43) $f(x)=\lambda x+(1-\lambda)b-x^\lambda b^{1-\lambda}$ とおいて, 最小値が 0 であることを示せばできる. 実際,

$$f'(x)=\lambda-\lambda x^{\lambda-1}b^{1-\lambda}=\lambda\bigl(1-(\tfrac{x}{b})^{\lambda-1}\bigr)$$

で $f(x)=0$ となる x を求めれば, $x=b$ を得る. さらに, 増減を調べれば $x=b$ で最小値を取ることがわかる. よって, 与式が成り立つ.

しかし, この問題は対数関数を学んでからでよい. 対数の凸性をいっているだけである. 実際, 与式の対数を取ると

$$\log(\lambda a+(1-\lambda)b)\geqq\lambda\log a+(1-\lambda)\log b$$

となるが, これは $y=\log x$ のグラフにおいて点 $(a,\log a)$ と $(b,\log b)$ を結ぶ線分を $(1-\lambda):\lambda$ に内分する点がグラフ上の点 $(\lambda a+(1-\lambda)b,\log(\lambda a+(1-\lambda)b))$ より下にあることを意味している.

2. $r<1$ とする. $0<a<x$ のとき, 不等式 $x^r-a^r<(x-a)^r$ が成り立つことを示せ.

解 (* p.43) $f(x) = x^r - a^r - (x-a)^r$ とおくと

$$f'(x) = rx^{r-1} - r(x-a)^{r-1}.$$

$f'(x) = 0$ とすると $(\frac{x}{x-a})^{r-1} = 1$. つまり $x = x - a$. つまり $x = \frac{a}{2}$. その前後の増減を調べれば, $x = \frac{a}{2}$ の前後で減少および増加していることがわかる. よって, $f(x)$ の最小値は 0 である. よって与式が成り立つ.