

北岡 他 著：『工科系の微分積分学の基礎』の第 8 章, 第 9 章の代用

1. Napier の数 e の定義

数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ の始めの数項を調べてみると,

$$\begin{aligned} (1+1)^1 &= 2, \\ (1+\frac{1}{2})^2 &= \frac{9}{4} = 2.25, \\ (1+\frac{1}{3})^3 &= \frac{64}{27} = 2.370, \\ (1+\frac{1}{4})^4 &= \frac{625}{256} = 2.44140625, \\ (1+\frac{1}{5})^5 &= \frac{7776}{3125} = 2.48832, \\ &\dots \end{aligned}$$

この数列が, 単調増加かつ有界であることを証明できる. (証明は付録とした). よつてこの数列は極限値を持つ. その極限値を e と記す. ここでは, e を小数で表示した場合, 始めの数桁を記しておく.

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= 2.71828182845904523 \dots \end{aligned}$$

2. 関数の極限としての Napier の数

e は関数の極限としても表される:

補題 1. いま x は実数の変数とすると

$$\begin{aligned} e &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

証明 第 1 の等式. 各 $x > 1$ について, 自然数 n を $n \leq x < n+1$ で定める. このとき

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

この式から,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n+1} &< 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n} \\ \therefore \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^x &< \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^x \end{aligned}$$

この左辺と右辺について,

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} &= \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^x, \\ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^x &< \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

$x \rightarrow \infty$ のとき, n についても $n \rightarrow \infty$ なので, この両辺はいずれも e に収束する (左辺の極限は $\frac{e}{e} = e$, 右辺の極限は $e \cdot 1 = e$). よつて, 目的の $\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ も e に収束する.

第 2 の等式. $x = -z$ とおくと, $z \rightarrow -\infty$ ゆえ, $x-1 \rightarrow \infty$ である. このとき,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z &= \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} = \left(\frac{x-1}{x} \right)^{-x} \\ &= \left(\frac{x}{x-1} \right)^x = \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^x \\ &= \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) \\ &\rightarrow e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

となり, 第 2 の等式も示された.

第 3 の等式. 第 1, 第 2 の等式で $t = \frac{1}{x}$ あるいは $t = \frac{1}{z}$ とおくと,

$$\lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e, \quad \lim_{t \rightarrow -0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

がわかる. 一般に

$$\lim_{t \rightarrow a+0} f(t) = \lim_{t \rightarrow a-0} f(t) = \alpha \iff \lim_{t \rightarrow a} f(t) = \alpha$$

であるから,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

を得る. □

練習 2. 定数 $a \neq 0$ について, 次を示せ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{a}}.$$

3. 自然対数の定義と性質

この e をもとにして対数関数 $y = \log x = \log_e x$ を考へる. この $\log x$ は x の 自然対数 と呼ばれる. もちろん

$$x = e^y \iff y = \log x.$$

命題 3. $\log x$ の導関数は次で与えられる:

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}.$$

証明 導関数の定義より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\ &= \log e^{\frac{1}{x}} \quad (\because \log x \text{ は連続関数.}) \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となり, 示された. □

4. 指数関数の導関数

次に e をもとにして指数関数 e^x を考へる.

命題 4. 次が成り立つ:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

証明 $y = e^x$ とおくと, $x = \log y$ であるから

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$. ここで, 逆関数の微分の公式より

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

となる. □

別証 導関数の定義に寄り沿つて証明してみる.

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

ここで $h = e^{\Delta x} - 1$ とおくと, $\Delta x = \log(1+h)$ であり,

$$h \rightarrow 0 \iff \Delta x \rightarrow 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\log(1+h)} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log(1+h)}{h}} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}} = e^x \frac{1}{\log e} \quad (\because \text{補題 1}) \\ &= e^x. \end{aligned}$$

(これも, 本質的には逆関数の微分を調べてみる.) □

5. 一般冪乗関数の導関数と対数微分法

命題 5. 定数 $a > 0$ について

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a.$$

証明 まづ $y = a^x$ とおく. これの自然対数を取つて微分すると

$$\frac{d}{dx} \log y = \frac{d}{dx} \log a^x = \frac{d}{dx} x \log a = \log a$$

一方 $\frac{d}{dx} \log y = \frac{y'}{y}$ なので,

$$y' = y \log a = a^x \log a$$

となる. □

命題 6. α が実定数のとき,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

証明 $y = x^\alpha$ とおくと

$$\frac{d}{dx} \log y = \frac{y'}{y}, \quad \frac{d}{dx} \log x^\alpha = \frac{d}{dx} (\alpha \log x) = \alpha \frac{1}{x}$$

よつて

$$\frac{y'}{y} = \alpha \frac{1}{x}, \quad \therefore y' = \alpha \frac{1}{x} y = \alpha x^{\alpha-1}$$

となり, 示された. \square

上の証明で行つた微分法を 対数微分法 といふ.

練習 7. 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $x^{\sin x}$ ($x > 0$) (2) $(x^2 + 1)^x$

(3) $\sqrt{\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-4)}}$

6. 指数関数と対数関数の基本性質のまとめ

命題 8. (指数関数のまとめ) a は正の定数で, $a \neq 1$ とする. 関数 $y = a^x$ は実数全体で定義された関数であり, 至るところで連続であり, 以下の性質を持つ.

(1) $a^0 = 1, a^1 = a.$

(2) $a > 1$ のとき,

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2}.$$

(3) $0 < a < 1$ のとき,

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} > a^{x_2}.$$

(4) $a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$

(5) $b = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) のとき,

$$a^b = \sqrt[n]{a^m}.$$

(6) $a^b a^c = a^{b+c}.$

(7) $(a^b)^c = a^{bc}.$

命題 9. (対数関数のまとめ) a は正の定数で 1 でないとする. 関数 $y = \log_a x$ の定義域は $(0, \infty)$ であり, 至るところで連続であり, 以下の性質も持つ.

(1) $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1.$

(2) $a > 1$ のとき,

$$x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

(3) $0 < a < 1$ のとき,

$$x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

(4) $a^{b \log_a c} = (a^{\log_a c})^b = c^b.$

(5) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$

(6) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$

(7) $\log_a b^c = c \log_a b.$

(8) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$

また, ここで, グラフも確認しておきたい (省略).

練習の解答:

練習 2.

$x \rightarrow 0$ のとき $\frac{x}{a} \rightarrow 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}} \right)^{\frac{1}{a}} \\ &= e^{\frac{1}{a}} \quad (\because \text{補題 1 の最後の等式}). \end{aligned}$$

練習 7

(1) $\frac{x^{\sin x} (x \cos x \log x + \sin x)}{x}$

($x^{\sin x - 1} (x \cos x \log x + \sin x)$ 等も可)

(2) $(x^2 + 1)^{x-1} \{ (x^2 + 1) \log(x^2 + 1) + 2x^2 \}$

(3) $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-4)}} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-4} \right)$

付録. Napier の数の存在証明

命題 10. 数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ は収束する. その極限値を e と書く. $2 < e < 3$ である.

証明 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ とおく. 次の 3 つを証明すればよい.

(1) $a_1 = 2$. (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n < a_{n+1}$. (3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n < 3$.
 まづ, (1) は明らか. 次に, (2) については, $n \geq 3$ として, 2 項定理を用いて

$$\begin{aligned}
 (11) \quad a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n} \right)^3 + \cdots \\
 &\quad \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2}{(n-1)!} \left(\frac{1}{n} \right)^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{n!} \left(\frac{1}{n} \right)^n \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \cdots \\
 &\quad \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{n-2}{n} \right) \\
 &\quad \quad \quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{n-2}{n} \right) \left(1 - \frac{n-1}{n} \right).
 \end{aligned}$$

同様にして, a_{n+1} は

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) + \cdots \\
 &\quad \cdots + \frac{1}{(n+1-2)!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \cdots \left(1 - \frac{n+1-3}{n+1} \right) \\
 &\quad \quad \quad + \frac{1}{(n+1-1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \cdots \left(1 - \frac{n+1-2}{n+1} \right) \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \cdots \left(1 - \frac{n+1-2}{n+1} \right) \left(1 - \frac{n+1-1}{n+1} \right).
 \end{aligned}$$

ここで a_{n+1} の項の数は $n+2$ 項であり, a_n の $n+1$ 項より 1 つ多いことに注意せよ. さて, この展開の先頭から 1 項づつ大小を比較していくと, 最初の 2 項 $1+1$ を除けば, 続く $(n-1)$ 項はすべて a_{n+1} の方が大きく, しかも a_{n+1} は最後に正の項を余計に持つてゐるから,

$$a_n < a_{n+1}$$

であることがわかる.

最後に (3) であるが, 上記 (11) から

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

がわかる. しかるに $n! = n(n-1)(n-1) \cdots 2 \cdot 1 > 2^{n-1}$ であるから,

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

となり, 成り立つ. □