解答の修正

教科書[1] p.67

問題 1.11 [A]
4. 次の関数の $x=0$ での冪級数展開を求めよ.
(2) $\tan^{-1} x$

(= 演習書 p.53, 例題 1.11.1 (4))
演習書の解答は未履修事項 (項別積分定理) を使用してゐるので良くない.

望ましい解答の例 いま, 等式 (問題 1.11 [A], 1 (2))

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z} \quad (z \neq 1)$$

に $z = -x^2$ を代入すると

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

を得る. これは任意の x について正しい. これを $x=0$ から x まで積分して

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

となる. 最後の項について

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| = \int_0^{|x|} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \right| dx = \int_0^{|x|} \frac{|x|^{2n+2}}{1+x^2}\, dx < \int_0^{|x|} |x|^{2n+2}\, dx = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

ここで $|x| < 1$ ならば

$$< \frac{1}{2n+3} \longrightarrow 0 \ \ (0 \to \infty).$$

従つて

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

が成り立つ. (解答終了)

注意 この解答は (残念ながら?) Taylor の定理 (**定理 1.27**) を使つてはゐない.

[1] 北岡他著：工科系の微分積分学の基礎 (学術図書)