微 分 積 分 学

2026 年度版

はじめに

この note は名城大学の工学系学科向け「微分積分 1」と「微分積分 2」の講義用に作成したものである．前期の「微分積分 1」では微分, 後期の「微分積分 2」では積分について学ぶ.

工学等で使ふためだけの解説をすることもできる様に思ふが, 数学の広い世界に触れていただきたいので, さうはしないで, 微分積分学を通じて数学の文化を味はつていただける様に書いたつもりである．筆者が長年, 微分積分学を教へてきて, 微分積分学を含めた数学といふ学問について感じてゐることを, ところどころに随想風に述べてゐる．これが, 読者が今後, 数学を学んでいく上での参考になればと期待する.

この講義録を利用される教員の方へ：ここに述べたすべてを 1 年間の講義で終へるのは難しいと思はれる．一例として第 3 章の級数の部分は, 録画で配信するなどの工夫が必要であらう.

歴史的かなづかひで書いたが, これは筆者の趣味である．活用などの仕組みを繙けば, こちらの方が断然 “ 数学的 ” である．また, 函数は「関数」のことである．他に読みづらい事項はないと信じる.

大西

参 考 文 献

[0] 北岡 良之 他：工科系の微分積分学の基礎, 2011 年, 学術図書出版社

[1] 岡安 隆照, 吉野 崇, 高橋 豊橋, 武元 英夫：微分積分学入門, 1988 年, 裳華房

[2] 三宅 敏恒：入門微分積分, 1992 年, 培風館

[3] 三宅 敏恒：微分方程式 – やさしい解き方 —, 2007 年, 培風館

[4] 三村 征雄：大学演習 微分積分学, 1969 年, 裳華房

[5a] 彌永 昌吉：数の体系（上）, 1972 年, 岩波新書 青 815

[5b] 彌永 昌吉：数の体系（下）, 1978 年, 岩波新書 黄 43

[6] 三村 征雄：微分積分学 I, II, 岩波全書

[7] Rudin, Walter：Principles of Mathematical Analysis, 1964 年, McGraw-Hill,（日本語訳 W. ルーディン：現代解析学, 1971 年, 共立出版, 近藤/柳原訳）

[8a] 藤原松三郎：微分積分学 第 1 巻, 2016 年 内田老鶴圃

[8b] 藤原松三郎：微分積分学 第 2 巻, 2017 年 内田老鶴圃

[9] 石谷 茂：$\forall$ と $\exists$ に泣く, 1974 年 現代数学社

[10] 石谷 茂：ε と δ に泣く, 1976 年 現代数学社

[11] 佐藤恒雄, 吉田英信：初歩から学べる 複素解析, 2001〜2006 年, 培風館

[12] 硲野敏博, 加藤芳文：理工系の基礎 複素解析, 2001 年, 学術図書

精密な議論が書かれた手近な本として [1] を勧める．[2] は小さい本にも拘はらず, 豊富な内容がうまくまとめられてゐる．特に Γ 函数, B 函数, 微分方程式の章を参照されるとよい．[11] と [12] は複素函数論の教科書であるが, 微積分の問題に焼き直していくつかの問題を借用した（[11] から 20.14, 20.15 を, [12] から 20.16, 20.17 を）.

【本書の利用にあたつて】本書を利用するにあたつて, 以下を留意していただきたい.

(1) 番号の右上に $\star$ のついた節, 定理, 命題, 補題などについては, 一旦は証明を読む必要はなく, 感覚的な理解に留めておけばよいと思はれる.

(2) この本は text として採用してゐる [0] の読み辛い部分を解説するために書き始めたものである. 従つて, [0] の非常に多くの演習問題を掲載してゐる. 照合の便宜のために 〔$=$2.10 A2(3)〕 や 〔$\fallingdotseq$2.10 A3(2)〕 の様な記載を入れてある.

【謝辞】　本書には, 読者の便宜をはかり, できるだけ多く図を挿入する様に配慮した. これらの図の作成には `TikZ&PGF`, `gnuplot`, `Maple` を用ゐてゐる. これらの非常に使ひ易く優れた applications を生み出し, 提供いただいた方々に深く感謝申し上げる.

【Greek Alphabet】

	大文字	小文字	読み	読み	対応する alphabet
1	A	α	alpha	アルファ	a
2	B	β	beta	ベータ	b
3	Γ	γ	gamma	ガンマ	g
4	Δ	δ	delta	デルタ	d
5	E	ε, ϵ	epsilon	イプシロン	e
6	Z	ζ	zeta	ゼータ	z
7	H	η	eta	エータ	ē
8	Θ	θ, ϑ	theta	テータ, シータ	th
9	I	ι	iota	イオタ	i
10	K	κ	kappa	カッパ	k
11	Λ	λ	lambda	ラムダ	l
12	M	μ	mu	ミュー	m
13	N	ν	nu	ニュー	n
14	Ξ	ξ	xi	クシイ	x
15	O	o	omicron	オミクロン	o
16	Π	π, ϖ	pi	パイ	p
17	P	ρ, ϱ	rho	ロー	r
18	Σ	σ, ς	sigma	シグマ	s
19	T	τ	tau	タウ	t
20	Υ	υ	upsilon	ウプシロン	u
21	Φ	φ, ϕ	phi	ファイ	ph
22	X	χ	chi	カイ	ch
23	Ψ	ψ	psi	プシイ, プサイ	ps
24	Ω	ω	omega	オメガ	ō

目 次

第 1 章　基 礎

§ 1.　実数

1.1.　集合と写像

集合の概念に関する以下の事柄や記法については既知とする．但し，以下の集合はどれもある定められた全体集合 U の部分集合であるとする：

(1) 集合とは，ある数学的な言明を満たす様な要素あるいは元と呼ばれるものの集まりである．

(2) $\varnothing$ ⋯ 空集合．要素を 1 つも含まない集合．

(3) $A = \{1, 2, 3, \cdots\}$ ⋯ 要素を書き並べて表す記法．

(4) $A = \{x \,|\, x$ は素数$\} = \{x\,;\, x$ は素数$\}$ ⋯ 要素の特徴を述べて表す記法．

(5) $A = B$ ⋯ 集合 A と集合 B の要素が完全に一致してゐることを示す記号．

(6) $A \subset B$ （あるいは $B \supset A$） ⋯ 集合 A は集合 B に含まれる．A は B の部分集合の意．これは $A = B$ のときも正しい．

(7) $A \cap B = \{x \,|\, x \in A$ かつ $x \in B\}$ ⋯ A と B の共通部分のこと．
$A \cup B = \{x \,|\, x \in A$ または $x \in B\}$ ⋯ A と B の和集合のこと．

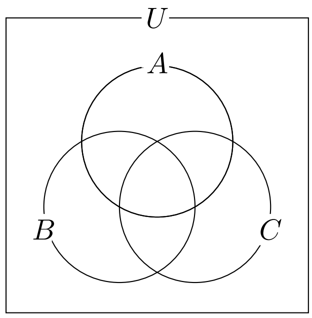
(8) $x \in A$ ⋯ x は集合 A の要素であるの意．

(9) $A \not\subset B$，$x \notin A$ 等 ⋯ $A \subset B$，$x \in A$ 等の否定．

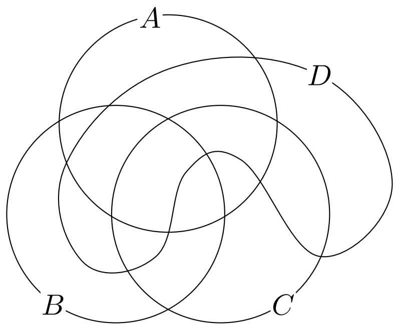
(10) $\{x \,|\, x \notin A\}$ を A の補集合（complement）と呼び A^{c} で表す．

(11) $A - B = A \cap B^{\mathrm{c}}$ ⋯ 差集合と呼ばれる．

集合の包含関係は Ben 図で図示するとわかり易い．全体集合 U 内の 3 つの集合 A, B, C の一般的な包含関係を図示すれば，右図の様になる．



注意 1.1　4 つ以上の集合については，円で描いてあらゆる包含関係を図示することはできない．例へば 4 つの集合であらゆる包含関係を図示すると右図の様になる．詳しくは [9] pp.63–71 を参照されたい．



命題 1.2　上の記法から（全体集合を U として）次の等式が成り立つ．

(1) $A^{\mathrm{c}} = U - A$.

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (B \cap A) \cap C = \cdots$.
よつてこれらは $A \cap B \cap C$ などと記せばよい．

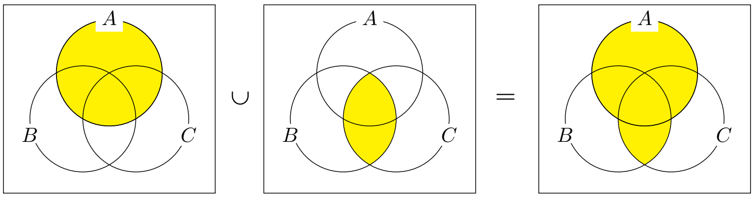
(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

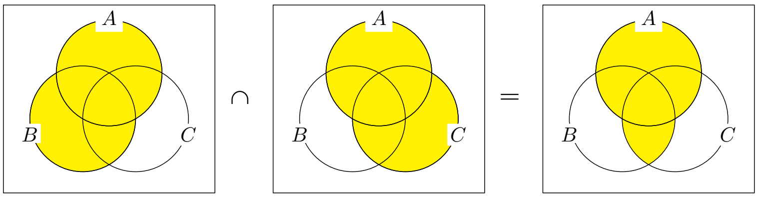
(5) $(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$.

(6) $(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$.

証明　ここでは厳密な証明ではなく，これらの等式を納得する方法を示す．
例へば (3) について：まづ左辺は



となる．一方右辺は

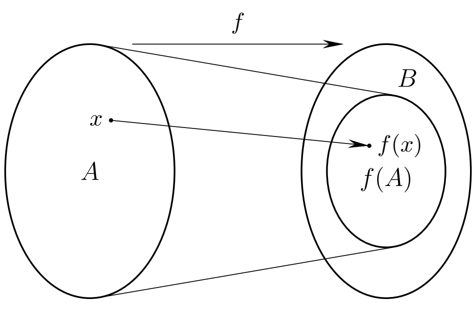


となつて等式が成り立つことが理解される．他の等式についても各自で試されたい．　□

定義 1.3　集合 A から B への<u>写像</u> f とは，A の各要素 x について，B の要素 $f(x)$ が定められてゐることを意味するものとする．それを記号で $f : A \longrightarrow B$ と書く．要素の対応は $x \longmapsto f(x)$ の様に記す．A を<u>定義域</u>といひ，集合

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

を f の<u>像</u>と呼ぶ．



演 習 問 題

1.4　A, B, C をある全体集合 U の部分集合とせよ．次のことを証明せよ．

(1) $A \cap B = A \cup B$ ならば $A = B$.　〔= 1.1B, 1〕

(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.　〔= 1.1B, 2〕

(3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.　〔= 1.1B, 3〕

1.2. 数

これまでて学んできた 自然数, 整数, 有理数の定義は既知とする：
(1) 自然数の全体 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ を $\mathbb{N}$ で表す [1].
(2) 整数の全体 $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ を $\mathbb{Z}$ で表す [2].
(3) 有理数の全体を $\mathbb{Q}$ で表す [3].
どんな有理数も $m \in \mathbb{Z}$ と $n \in \mathbb{N}$ によつて, $\dfrac{m}{n}$ の形に書けて, 次が成り立つ

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n.$$

注意 1.5 知られてゐる数にある演算 $\star$ が定義されると, その逆演算（つまり, 与へられた a と c に対して $a \star x = c$ を満たす x を求める演算）が自由にできることを目指すことで, 数の世界は広がつてきた. 例へば $\mathbb{N}$ に定義された加法の逆演算は減法であり, それが自由にできる様に $\mathbb{Z}$ へと広がり, $\mathbb{Z}$ に定義された乗法の逆演算, つまり除法が自由にできる様に $\mathbb{Q}$ へと広がつた. 今も数の世界は拡大しつつある.

1.3. 実数

命題 1.6 有理数を小数で表示すると, 有限小数になるか, または, 循環小数になる. 逆に有限小数や循環小数は有理数である. このことは, 何進法で表示しても成り立つ.

証明 与へられた有理数 $\frac{m}{n}$（$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$）について, これが有限小数にならないとする. m の n による除算を行なふとき, 余りの可能性は $0, \cdots, n-1$ の n 通りしかない. よつて n 回以上の除算の中に同じ余りが現れる. その余り以降の計算は全く同じ計算であるから, 商である小数表示に並ぶ数字は繰り返へしが起こる.
逆を示さう. まづ, 有限小数は有理数であることは簡単にわかる. 循環小数 x の循環節の長さを k とするとき, $10^k x - x$ は有限小数であるから, それを r と書けば

$$10^k x - x = r, \quad \therefore\ x = \frac{r}{10^k - 1}$$

となり, x は有理数である. 以上のことは, 10 進法に限つたことではなく, 別の進法を選んでも同じことである. □

さて, 一方で循環しない小数があるのだから, 上のことから, 有理数でない数（無理数）があることが納得できる.

Pythagoras は類似の考察を行ひ, 彼は無理数の存在を“隠蔽”しやうとしたと考へられてゐる. この当時は音楽と数学が一体のものであつて, 協和音は（同じ材質で同じ張力で張られた）弦の長さが整数比であるときに限られることが理由であつたと思はれてゐる.

[1] 英語 the natural numbers より.
[2] 数を意味す独語 Zahlen（ツァーレン）より.
[3] 商を意味する英語 quotient（クォーシェント）より.

まとめると, 1 つの小数による表示が 1 つの実数を与へる. また, 1 つの実数は本質的に 1 つの小数に表示される. 例外は

$$1 = 0.99999\cdots$$

の様に 9 が際限なく続く場合である. 以上の考察をもつと厳密に展開して実数が構成されるが, ここでは, 直観的な理解を主とすることにして, 詳細は述べない. 興味があれば, [5a], [5b] などを参照されたい.

感覚的には, 実数は数直線の描像ととても合致するから, 数直線を多用し, 函数の graph などが図形として視認できるのである.

定義 1.7 数直線上の点に, 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を通常の方法で, 対応させたとき, 依然として“隙間”が残る. これらの隙間を埋めて, 丁度, 数直線全体を埋めつくす様に広げた数の全体が, 実数である. 実数は記号で $\mathbb{R}$（英語 The real numbers より）と表される.

定義 1.8 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の区間と呼ばれる特別な部分集合があり, 以下の様に定義される. 但し $a, b \in \mathbb{R}$ である.

(1) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$, (2) $[a, b) = \{x \mid a \leqq x < b\}$,
(3) $(a, b] = \{x \mid a < x \leqq b\}$, (4) $[a, b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$,
(5) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, (6) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqq b\}$,
(7) $(a, \infty) = \{x \mid a < x\}$, (8) $[a, \infty) = \{x \mid a \leqq x\}$.

このうち, (1), (5), (7) は開区間と呼ばれ, (4), (6), (8) は閉区間と呼ばれる.
区間も集合であるが, その要素は点と呼ばれることが多い.

注意 1.9 1.8 (4) において, $a = b$ の場合の $[a, a]$ は a のみからなる集合であるが, 本書では, 便宜上 $[a, a]$ は区間でないものとする.

定義 1.10 たとへば, 区間 $I = [a, b)$ について, a や b を I の区間の境界, 境界点, 端点などと呼ぶ. 他の形の区間であつても同様である. 但し $(-\infty, b]$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$ 等の区間については, $-\infty$ や ∞ を境界とはいはない.

定義 1.11 集合 $A \subset \mathbb{R}$ と $a \in A$ について, $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$ となる様な $\varepsilon > 0$ が存在するならば, a は A の内点と呼ばれる. 従つて区間の端点はその区間の内点ではない.

例題 1.12 ここで 1.3 の記法の例を挙げておく.

(1) $n \longmapsto n!$, $\mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$.
(2) $x \longmapsto x^3 - 2x + 1$, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
(3) $x \longmapsto \dfrac{2x + 1}{x - 2}$, $\mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
(4) $x \longmapsto \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$, $\mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$.

絶対値について確認しておく.

定義 1.13 実数 a に対して,

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定め, これを a の<u>絶対値</u>と呼ぶ.

次のことはよく使はれる. 証明は簡単なので述べない.

命題 1.14 (<u>三角不等式</u>) 2 つの実数 a, b について

$$|a| - |b| \leqq |a+b| \leqq |a| + |b|$$

が成り立つ.

定義 1.15 定数 $a \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対し, 開区間

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \left\{ x \,\middle|\, |x-a| < \varepsilon \right\}$$

を a の <u>ε 近傍</u>, あるいは単に a の<u>近傍</u>と呼ぶ.

定義 1.16 <u>座標平面</u>とは 2 つ実数の組の全体

$$\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \}$$

のことであり, x 軸 (即ち $\{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$) を水平に描き, y 軸 (即ち $\{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$) はこれに鉛直に描かれる. <u>原点</u>とは点 $(0, 0)$ のことであつて, 通常 O と記される.

演 習 問 題

1.17 2 つの集合

$$A = \{ x \mid -1 < x \leqq 3 \},\quad B = \{ x \mid 2 < x \leqq 4 \}$$

について答へよ.

(1) A, B を区間の記号で記せ.

(2) $A \cap B$ を不等式を使つて表せ. また, 区間の記号で表せ.

1.18 次は正しいか否かを理由を付けて答えよ.

(1) $\{1,\ 3\} \subset [1, 3)$.
(2) $\{1,\ 2\} \in [1, 3)$.
(3) $[1, 3) \subset (1, 3]$.
(4) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
(5) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$.

1.19 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ であることを証明せよ.

1.20 次の事が正しいか否かを理由を付けて答えよ.

(1) $0.101001000100001 \cdots \notin \mathbb{Q}$.

(2) a が実数のとき $\left| \sqrt{a^2} \right| = a$.

(3) a が実数のとき $|-(-a)| = |-a|$.

§2.　数列とその性質

2.1.　数列

定義 2.1　(1)　数列とは, 自然数 $\mathbb{N}$（の部分集合）から実数 $\mathbb{R}$ への写像 $n \mapsto a_n$ のことである. これを $\{a_n\}$ または

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

と表す. ここに並んだ数をこの数列の初項, 第 2 項, 第 3 項, $\cdots$ などと呼ぶ. n を変数とみたときの a_n を, $\{a_n\}$ の一般項と呼ぶ.
(2)　数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n が $a_1, \cdots, a_{n-1}$（のいくつか）から帰納的に定まるとき, それを表す関係式をこの数列の漸化式と称する. その様な数列のすべての項は, 最初の有限個のいくつかの項 $a_1, \cdots, a_m$ と漸化式だけから定まる.

例 2.2　数列の例を述べながら, その他の概念を振返る :

(1) 数列 $\{3n+1\}$ を書き下せば 4, 7, 10, 13, $\cdots$ と表示される. これは, 初項が $a_1 = 4$ で, $a_{n+1} = a_n + 3$ なる漸化式で定まる数列である.
(2) 数列 $\{n^2\}$ を書き下せば 1, 4, 9, 16, 25, $\cdots$ と表示される. これは, 初項 $a_1 = 1$ と漸化式 $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ から定まる数列である.
(3) 任意の隣接 2 項の差が一定, 即ち $a_{n+1} - a_n = d$（d は定数）がすべての $n \in \mathbb{N}$ について成り立つとき, $\{a_n\}$ を等差数列と呼び, d をこの数列の公差といふ. 初項が $a_1 = a$ で, 公差が d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = a + (n-1)d$ で与へられる.
(4) 任意の隣接 2 項の比が一定, 即ち $a_{n+1} = r\,a_n$（r は定数）がすべての $n \in \mathbb{N}$ について成り立つとき, $\{a_n\}$ を等比数列と呼び, r をこの数列の公比といふ. 初項が $a_1 = a$ で, 公比が r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = a\,r^{n-1}$ で与へられる.

定義 2.3　数列 $\{a_n\}$ は, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $a_n \leqq a_{n+1}$ であるとき, 単調増加であるといはれ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $a_n \geqq a_{n+1}$ であるとき, 単調減少であるといはれる. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $a_n < a_{n+1}$ であるとき, 狭義単調増加であるといはれ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $a_n > a_{n+1}$ であるとき, 狭義単調減少であるといはれる.

例 2.4　一般項が $a_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$（$\lfloor a \rfloor$ は実数 a を越えない最大の整数を表す）のとき, 数列 $\{a_n\}$ を書き下すと

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \cdots$$

となるが, これは単調増加である.

例 2.5　数列 $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$ は狭義単調減少である.

例題 2.6 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ から定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解答 $\alpha = 3\alpha - 1$ なる α, つまり $\alpha = \frac{1}{2}$ を漸化式の両辺から減じれば

$$a_{n+1} - \tfrac{1}{2} = 3(a_n - \tfrac{1}{2}).$$
$$\therefore\ a_n - \tfrac{1}{2} = 3^{n-1}(a_1 - \tfrac{1}{2}) = 3^{n-1} \cdot \tfrac{1}{2}.$$
$$\therefore\ a_n = \tfrac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$$

を得る. □

初項と漸化式から一般項を求めることを, 漸化式を解く, などといふことがある.

2.2. 重要な数列の和の公式

等差数列と等比数列の和の公式も記載しておく.

命題 2.7 (1) 初項 a, 公差 d の等差数列の第 n 項までの和は次の式で与へられる:

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl(a + (k-1)d\bigr) = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}.$$

(2) 初項 a, 公比 r の等比数列の第 n 項までの和は次の式で与へられる:

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r} & (r \neq 1 \text{ のとき}), \\ na & (r = 1 \text{ のとき}). \end{cases} \tag{2.8}$$

問 2.9 上の式 (2.8) を証明せよ.

命題 2.10 (冪乗和の公式) 次の公式が成り立つ:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$; (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

証明 (1) は易しい. (2) については

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

を $k = 1, \cdots, n$ について加へる:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$
$$\therefore\ n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

これより (2) が得られる. (3) も同様の考へ方で得られるから読者には試られたい. □

これらの公式を覚えておくと, 便利である. 参考までに, さらに先を書いてみれば,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

となる. 証明は 2.10 と同じ考へ方でできるので, 試られたい [4].

[4] この話題について, 荒川恒男 他 著:『ベルヌーイ数とゼータ関数』(牧野書店) を参照されたい.

2.3. 数列の極限

定義 2.11 数列 $\{a_n\}$ において, n を限りなく大きくすれば, a_n がある値 $\alpha \in \mathbb{R}$ に限りなく近づくとき, $\{a_n\}$ の極限値は α である, または α に収束するといひ,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \longrightarrow \alpha \ \ (n \to \infty)$$

と記す.

注意 2.12 これを精密に述べると次の様になる：
任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるとき, $\{a_n\}$ の極限値は α であるといふ. この定義の詳細については, たとへば [10] を見られたい. このことから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha) = 0$$

である.

定義 2.13 数列 $\{a_n\}$ について, n が増大するにつれて, a_n が限りなく大きくなるならば, $\{a_n\}$ の極限は無限大である, 或いは無限大に発散するといはれ, これを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad a_n \longrightarrow \infty \ \ (n \to \infty)$$

と書く. 極限が負の無限大であることの定義も同様である.

注意 2.14 これを精密に述べると次の様になる：
任意の $M > 0$ に対し, $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n > N \implies a_n > M$$

となるとき, $\{a_n\}$ の極限は ∞ であるといふ.

注意 2.15 極限値が存在する場合と, 無限大または無限小に発散する場合をまとめて極限が存在するといふ. また, 極限値が存在しない場合はすべて, その数列は発散する, といはれる. これらの用語を整理しておく.

<table>
<tr><td>極限値が存在</td><td>∞ に発散</td><td>−∞ に発散</td><td>その他（振動など）</td></tr>
<tr><td>収 束</td><td colspan="3">発 散</td></tr>
<tr><td colspan="3">極 限 が 存 在</td><td>極限は存在しない</td></tr>
</table>

命題 2.16* 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が共に存在するとする．十分大きな n について [5] $a_n \leqq b_n$ であれば, 次式が成り立つ [6]：

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

証明 $\alpha > \beta$ とする．任意の $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) > \varepsilon > 0$ なる ε について, $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, $|b_n - \beta| < \varepsilon$ である．このとき

$$b_n - a_n = (b_n - \beta) - (a_n - \alpha) - (\alpha - \beta) < \varepsilon + \varepsilon + (\alpha - \beta) < 0$$

となる．これは仮定に反する． □

系 2.17 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ について, $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$ である．

証明 2.16 を $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ および $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ に対して使へば, 仮定より

$$\ell \leqq \lim_{n\to\infty} b_n \leqq \ell$$

となるから, 主張が示された． □

命題 2.18* $c \in \mathbb{R}$ を定数とする．数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束するとする．このとき $\{ca_n\}$, $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ も収束し（つまり以下の左辺の極限値も存在し）, 次の等式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n, \tag{2.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{2.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{2.21}$$

上の仮定に加へて $\{b_n\}$ の各項と極限値が 0 でないならば $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ も収束し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \tag{2.22}$$

が成り立つ．

注意 2.23 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．(2.19) と (2.20) は, 直観的には, それぞれ,

$$|ca_n - c\alpha| = |c||a_n - \alpha| \longrightarrow 0 \ (n \to \infty),$$

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \longrightarrow 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

と示される（後者の不等号は 1.14 による）が, 右辺の極限が 0 であることを示すのに, 証明すべき主張を使つてゐるのでよくない．正しくは 2.12 の定義を使ふ必要がある．

5) 「$N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n > N$ について」の意．

6) 任意の n について $a_n < b_n$ であつても, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となることがある．

証明 (2.18 の). 2.23 の記号をそのまま使用する. (2.19) について. $c=0$ の場合は明らかだから $c\neq 0$ とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $N\in\mathbb{N}$ があつて

$$n>N \implies |a_n-\alpha|<\tfrac{\varepsilon}{|c|}.$$

$$\therefore\ n>N \implies |ca_n-c\alpha|<\varepsilon.$$

よつて主張が示された.
(2.20) について. 仮定より, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $N_1\in\mathbb{N}$ があつて

$$n>N_1 \implies |a_n-\alpha|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

であり, また $N_2\in\mathbb{N}$ があつて

$$n>N_2 \implies |b_n-\beta|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

である. いま $N=\max\{N_1,N_2\}$ とおけば, 1.14 により,

$$n>N \implies |(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)|\leqq|a_n-\alpha|+|b_n-\beta|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

であるから主張が示された.
(2.21) について. $\{\,|b_n|\,\}$ の一つの上界を M とすれば

$$\begin{aligned}0&\leqq|a_nb_n-\alpha\beta|=|a_nb_n-\alpha b_n+\alpha b_n-\alpha\beta|\leqq|a_nb_n-\alpha b_n|+|\alpha b_n-\alpha\beta|\\&\leqq|a_n-\alpha||b_n|+|\alpha||b_n-\beta|\leqq|a_n-\alpha|\,M+|\alpha||b_n-\beta|.\end{aligned}$$

(2.19) と (2.20) から, 右辺の極限は 0 である. 2.17 の ℓ を 0 として用ゐれば, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_nb_n-\alpha\beta|=0$ がわかり, 2.12 の後半から所望の主張を得る.
(2.22) について. $\beta\neq 0$ であるから $\beta>B>0$ なる B が存在する. $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ であれば $|b_n|>B$ となる (読者はこの理由を説明できるか). よつて $n>N$ であれば,

$$\begin{aligned}0&\leqq\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{\alpha}{\beta}\right|=\left|\frac{a_n\,\beta-\alpha\,b_n}{b_n\,\beta}\right|\\&\leqq\frac{|a_n\,\beta-\alpha\beta|+|\,\alpha\beta-\alpha\,b_n\,|}{|b_n\,\beta|}\\&=\frac{|a_n\,\beta-\alpha\beta|}{|b_n\,\beta|}+\frac{|\,\alpha\beta-\alpha\,b_n\,|}{|b_n\,\beta|}\\&\leqq\frac{|a_n-\alpha||\beta|}{B|\beta|}+\frac{|\alpha||\,\beta-b_n\,|}{B|\beta|}\ \longrightarrow\ 0+0\ \ (n\to\ \infty)\end{aligned}$$

である. 最後の部分では (2.19) と (2.20) を使つた. これで (2.22) が示され, 主張はすべて証明された. □

次の事実は高校までに学ぶ基本的なことであるので, 証明なしで述べておく.

命題 2.24 等比数列 $\{r^n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (|r|<1), \\ 1 & (r=1), \\ \infty & (r>1), \\ \text{極限なし} & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

例題 2.25 次の数列の極限値を求めよ.

(1) $\left\{\dfrac{2n+1}{3n-2}\right\}$. (2) $\{\sqrt{3n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\,)\}$.

(3) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$. (4) $\left\{\dfrac{5^n-2^n}{5^n+3^n}\right\}$.

解答 (1) $\left\{\dfrac{2n+1}{3n-2}\right\}$ の極限は

$$\frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} \longrightarrow \frac{2}{3} \quad (n\to\infty)$$

である. あるいは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

である.

(2) については, 分母子に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ を掛けることで,

$$\begin{aligned} \sqrt{3n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\,) &= \frac{2\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{2\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \longrightarrow \sqrt{3} \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

と求められる [7].

(3) 任意の n について $-1 \leqq \sin n \leqq 1$ であるから

$$\frac{-1}{n} \leqq \frac{\sin n}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

ここで, 2.16 を踏まえて $n\to\infty$ とすれば

$$\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

がわかる.

(4) 2.24 と 2.18 を組み合はせて,

$$\frac{5^n-2^n}{5^n+3^n} = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty)$$

となる. □

[7] ここで $\sqrt{\lim_{n\to\infty} c_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{c_n}$ なる事実を使つたが, それは 6.19 で保障される.

例題 2.26 次の漸化式で定まる数列の極限を求めよ.

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1$. (2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 1}{2a_n}$.

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$.

解答 (1) もし極限値が存在するならば, それを α とすると 2.18 により,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha - 1$$

が成り立たなければならない. これから得られる $\alpha = -2$ を与式の両辺から引いて

$$a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(a_n + 2).$$

ここで $a_1 + 2 = 3$ であるから

$$a_n + 2 = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad \therefore\ a_n = \frac{3}{2^{n-1}} - 2 \longrightarrow -2 \ \ (n \to \infty)$$

(2) もし極限値が存在するならば, それを α とすると 2.18 により,

$$\alpha = \frac{3\alpha - 1}{2\alpha}$$

が成り立たなければならない. これを解くと $\alpha = 1$ である. 即ち, 極限が存在するならばそれは 1 である. この予測値を与式の両辺から引いて

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{2a_n}, \quad \therefore\ \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{2a_n}{a_n - 1} = 2 + \frac{2}{a_n - 1}.$$

ここで $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ とおくと, $b_1 = 1$ で,

$$b_{n+1} = 2b_n + 2, \quad \therefore\ b_n = 3 \cdot 2^{-n+1} - 2,$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty, \quad \therefore\ a_n = \frac{1}{b_n} + 1 \ \longrightarrow 1 \ \ (n \to \infty).$$

(3) これの一般項は容易(たやす)くは書き下せないが, 極限値 α が存在するとすれば

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 1}$$

となるから $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であるが, 帰納法によりどの項も 1 より大きいことがわかるから 2.16 により $\alpha > 1$ であり, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である. さて, ここで

$$|a_{n+1} - \alpha| = |\sqrt{a_n + 1} - \alpha| = \left| \frac{a_n + 1 - \alpha^2}{\sqrt{a_n + 1} - \alpha} \right| = \left| \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{a_n + 1} + \alpha} \right| < \frac{1}{2}\,|a_n - \alpha|$$

が得られるので (最後の不等号は $\alpha > 1$ からわかる),

$$|a_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2^n}\,|a_1 - \alpha| \ \longrightarrow\ 0 \ \ (n \to \infty) \tag{2.27}$$

がわかる. つまり α は実際に極限値である. (後の 4.20 も参照せよ.) □

次の等式 (2 項展開) は頻繁に利用される.

命題 2.28 (2 項展開) 整数 $n \geqq 0$ について, 次式が成り立つ:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

ここで $\binom{n}{r} = {}_n\mathrm{C}_r$ は 2 項係数である.

例題 2.29 $a>0$ を定数とする. 数列 $\{\sqrt[n]{a}\}$ の極限値が 1 であることを示せ.

証明 場合分けをして示す. まづ $a=1$ のときは明らかに正しい.
$a>1$ の場合を考察する. $\sqrt[n]{a}=1+h_n$ とおく. このとき $h_n>0$ である. 両辺を n 乗すると

$$a=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}{h_n}^2+\cdots+(h_n)^n>1+nh_n.$$

ゆゑに

$$(0<)\,h_n<\frac{a-1}{n}\longrightarrow 0\ \ (n\longrightarrow\infty).$$

よつて 2.17 により $\lim_{n\to\infty}h_n=0$ であり, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ である. $0<a<1$ の場合は $\frac{1}{a}>1$ と $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ であることから, (2.22) を用ゐて主張が示される. □

例題 2.30 $a>1$ を定数とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$$

であることを示せ.

解答 $a=1+h$ とおくと $h>0$ であり, $n>1$ のとき,

$$a^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2$$

であるから,

$$(0<)\,\frac{n}{a^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

である. □

問 2.31 $a>1$ を定数とする. このとき次の (1), (2) を証明せよ.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{a^n}=0.$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0.$

(Hint: 上の 2.30 の証明の中の展開式の第 3 項に着目する.)

例題 2.32 $A\geqq 0$ を定数とするとき, 次を示せ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+A}=1.$$

解答 各 n に対して $\sqrt[n]{n+A}=1+h_n$ とおくと $h_n>0$ であり, $n+A=(1+h_n)^n\geqq\frac{1}{2}n(n-1)h_n$ である. よつて $(0<)\,h_n\leqq 2\frac{n+A}{n(n-1)}=\frac{1+\frac{A}{n}}{n-1}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$ であり, $\lim_{n\to\infty}h_n=0$ がわかり, 与式が成り立つことがわかる. □

漸化式を解いて一般項がうまく記述でき, そこから極限がわかる場合もあるが, 一般には漸化式から一般項を記述することは容易ではない. しかし, 一般項を具体的に記述できなくても極限が簡単にわかる場合は多い. 例へば graph を使ふ方法があり, 4.20 に説明がある.

演 習 問 題

2.33 次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ について一般項 a_n と極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\,a_n + 1.$

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,a_n + 1.$

(3) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{3}{2}\,a_{n+1} - \dfrac{1}{2}\,a_n.$

(Hint: $a_{n+2} - \alpha\, a_{n+1} = \beta\,(a_{n+1} - \alpha a_n)$ の形に変形する.)

2.34 次の数列について, 単調増加, 単調減少, どちらでもない, のいづれであるか, 理由を付けて答へよ.

(1) $\{(-3)^n\}$.

(2) $\{2n-3\}$.

(3) $\{1-\frac{1}{n}\}$.

(4) $\{n^2-3n\}$.

2.35 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+1}.$ 〔≒ 1.2A, 1(1)〕

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n}{n^2+2n+1}.$ 〔≒ 1.2A, 1(4)〕

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}\,).$ 〔≒ 1.2A, 1(5)〕

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 3\cdot 2^n}{5^{n+1}+2^n}.$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5^n}.$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{n+1}$ 　(但し, 函数 $\cos x$ を既知とする).

§ 3. 上限, 下限, 最大値, 最小値

3.1. 上限と下限

集合 $B \subset \mathbb{R}$ の最大値や最小値が存在すれば, それぞれを $\max B$, $\min B$ で表す.

定義 3.1 実数の部分集合について以下の様に定義する. 但し $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ とする.
(1) 任意の $a \in A$ について $a \leqq M$ となる $M \in \mathbb{R}$ が存在するとき, A は上に有界であるといはれ, M は A の上界であるといはれる. 空集合でない A が上に有界であるとき, A の上界の中に最小値が存在する[8]. それを A の上限 (supremum) と呼び, $\sup A$ で表す. A が上に有界でないときは A の上限は無限大であるとし $\sup A = \infty$ と書く. A に最大値が存在すれば, それが $\sup A$ に他ならない.
(2) 任意の $a \in A$ について $m \leqq a$ となる $m \in \mathbb{R}$ が存在するとき, A は下に有界であるといはれ, m は A の下界であるといはれる. 下に有界な A に対して, 下界の最大値が存在する. それを A の下限 (infimum) と呼び, $\inf A$ で表す. A が下に有界でないときは A の下限は負の無限大であるとし $\sup A = -\infty$ と書く. A に最小値が存在すれば, それが $\inf A$ に他ならない.
(3) 空集合 $\varnothing$ の上界や下界は考へない (存在しない).
(4) さらに, 数列 $\{a_n\}$ について, これを集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ と考へて, その上界や下界も同様に定義される.

例 3.2 $\max[a, b)$ は存在せず. $\sup[a, b) = b$. $\sup[a, \infty) = \infty$, $\inf[a, \infty) = a$.
$\min\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ は存在せず. $\inf\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = 1$. $\sup \mathbb{N} = \infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$.

問 3.3 次の集合 A の上限と下限を求めよ.
(1) $A = \{x^2 - 3x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$. (2) $A = \{n^2 - 3n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
(3) $A = \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

3.2. 単調収束定理

実数の持つ, 本質的な性質が次の定理に込められてゐる. 詳述はしないが, これを十分に納得できてゐることが重要である[9]. 証明については, [6] などを参照されたい.

定理 3.4 (単調収束定理) 上に有界な単調増加数列は収束する. また, 下に有界な単調減少数列も収束する.

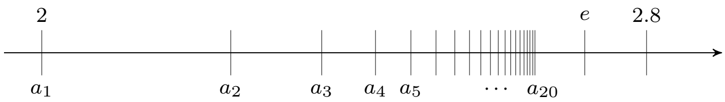
例 3.5 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ は下に有界で単調減少であつて, 0 に収束する.

3.4 の重要な応用例として Napier の数の存在証明がある. 即ち, 以下の 3.6 で説明する通り, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ なる数列 $\{a_n\}$ は上に有界で単調増加である.

[8] 証明には手間が掛かるが, ここに実数の本質が現れる. [6], 第 2 章 §4 や [7] 定理 1.36 を参照されたい. 下界の最大値の存在も同様である.
[9] 筆者は, これを理解できたと感じるまで, かなりの時間を思考に費した記憶がある.

命題 3.6（Napier［ネイピア］の数）数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は収束する． その極限値は通常 e と書かれて Napier［ネイピア］の数または自然対数の底と呼ばれる： $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$． $2<e<3$ である．

証明 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とおく. 次の 3 つを証明すれば 3.4 と 2.16 から主張が従ふ：
(1) $a_1=2$； (2) 任意の $n\in\mathbb{N}$ について $a_n<a_{n+1}$； (3) 任意の $n\in\mathbb{N}$ について $a_n<3$.



まづ, (1) は明らか. 次に, (2) については, $n\geqq 3$ として, 2 項定理 2.28 を用ゐて

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\\
&\quad\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\
&\quad\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\\
&\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

同様にして, a_{n+1} は

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\\
&\quad\cdots+\frac{1}{(n+1-2)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n+1-3}{n+1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{(n+1-1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n+1-2}{n+1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n+1-2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n+1-1}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

ここで a_{n+1} の項の数は $n+2$ 項であり, a_n の $n+1$ 項より 1 つ多いことに注意せよ. さて, この展開の先頭から 1 項づつ大小を比較していくと, 最初の 2 項 $1+1$ を除けば, 続く $(n-1)$ 項はすべて a_{n+1} の方が大きく, しかも a_{n+1} は最後に正の項を余計に持つてゐるから

$$a_n<a_{n+1}\qquad(n>1)$$

であることがわかる.
最後に (3) であるが, 上記 (3.7) において $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\cdots$, $\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<1$ だから

$$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

しかるに $n!=n(n-1)(n-1)\cdots 3\cdot 2>2^{n-1}$ であるから,

$$
\begin{aligned}
a_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3
\end{aligned}
$$

となり, 3.4 と 2.16 によつて, 主張が得られる. □

§ 4. 函数, 函数の graph, 合成函数, 逆函数, 漸近線

4.1. 函数, 単調性, 合成函数と逆函数

定義 4.1 実数のある部分集合 I（区間など）から実数への写像を函数と呼び, f, g などの記号を使つて $x \mapsto f(x)$ などと表記する. ここで I を定義域と呼び,

$$f(I) = \{\, f(x) \,|\, x \in I \,\}$$

を f の値域といふ. ここで, 各 $x \in I$ に対して, 唯一つの値 $f(x)$ が定まることを課してゐることに注意して欲しい.

函数の単調性について述べておく.

定義 4.2 区間 I で定義された函数 $f(x)$ は, 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して, $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$（或いは $f(x_1) < f(x_2)$）であるとき, 単調増加（或いは狭義単調増加）であるといはれる. 同様に, 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して, $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \geqq f(x_2)$（或いは $f(x_1) > f(x_2)$）であるとき, 単調減少（或いは狭義単調減少）であるといはれる. これらの函数を総じて単調な函数と呼ぶ.

定義 4.3 2 つの函数 f, g があり, f の値域が g の定義域に含まれるとき, $x \mapsto g(f(x))$ によつて函数が定まる. これを f と g の合成函数と呼び, $g \circ f$ で表す.

例 4.4 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ のとき, $f \circ g$ も $g \circ f$ も存在し, 次の様になる：

$$(f \circ g)(x) = f\,(g(x)) = (x+1)^2, \quad (g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = x^2 + 1.$$

定義 4.5 函数 $y = f(x)$ について, これの値域の各 y に対応する x が 1 つだけのとき, 写像 $y \mapsto x$ を函数とみたものを $f(x)$ の逆函数と呼んで, $x = f^{-1}(y)$ と書く. 特に, f^{-1} の定義域と値域は f のそれらと入れ換はりになる. またこのとき $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ が成り立つ. $f(x)$ の逆函数は存在するとしても唯一つである.

注意 4.6 値域が区間である様な狭義単調函数は逆函数を持つ. つまり, 区間 I を定義域とし, $f(I)$ が区間である様な狭義単調函数は $f(I)$ を定義域とし I を値域とする逆函数 $y \mapsto f^{-1}(y)$ が唯一つ存在する.

問 4.7 次の $f(x)$, $g(x)$ について, 合成函数 $(f \circ g)(x)$ と $(g \circ f)(x)$ を求めよ.

(1) $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2 + 1$. 〔= 1.4A, 1(1)〕
(2) $g(x) = \cos x$, $f(x) = 3x$. （三角函数は §5.1 で復習する） 〔= 1.4A, 1(2)〕
(3) $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$.
(4) 三角函数, 逆三角函数（§ 5.2）を既知として $g(x) = \tan x$, $f(x) = \arctan x$.
(5) 指数函数（§ 5.3）, 対数函数（§ 5.4）を既知として $g(x) = e^x$, $f(x) = \log x$.

4.2.　偶函数, 奇函数, 函数の graph, 漸近線

定義 4.8　函数 $f(x)$ の定義域を I とし, I は $-x \in I$ ならば $x \in I$ を満たすとせよ. このとき, もし $f(-x) = f(x)$ が任意の $x \in I$ について成り立つならば, $f(x)$ は偶函数と呼ばれ, もし, $f(-x) = -f(x)$ が任意の $x \in I$ について成り立つならば, $f(x)$ は奇函数と呼ばれる.

定義 4.9　定義域を I とする函数 $y = f(x)$ について, 座標平面上の集合

$$\{\,(x,\, f(x)) \mid x \in I\,\}$$

をこの函数の graph と呼ぶ.

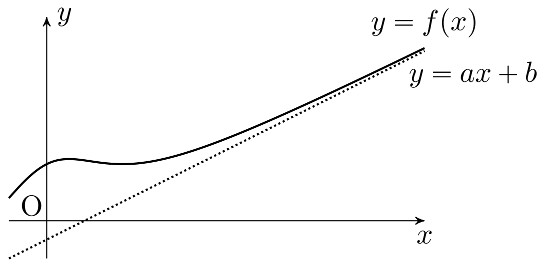
注意 4.10　函数 $f(x)$ と点 (a,b) について, $b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$ であるから, (a,b) が $y = f(x)$ の graph 上にあることと (b,a) が $y = f^{-1}(x)$ の graph 上にあることとは同値であり, $f(x)$ の graph は $f^{-1}(x)$ の graph と直線 $y = x$ に関して対称である.

論理的な順序に反するが, graph の描画に必要なので, 函数の極限（§6.1）を既知として 漸近線について述べておく.

定義 4.11　区間 $(c, +\infty)$ で定義された函数 $y = f(x)$ と函数 $y = ax + b$ について,

$$\lim_{x\to\infty} \bigl(f(x) - (ax+b)\bigr) = 0$$

（極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ の定義は 6.1 で行ふ!）となるとき, $y = ax + b$（の graph）をこの函数（の graph）の漸近線と呼ぶ.　区間 $(-\infty, c)$ で定義された函数についても同様である.



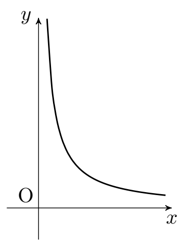
さらに, 函数 $y = f(x)$ が開区間 I で定義されてゐて, I の閉包の点 c について,

$$\lim_{x\to c+0} f(x) = +\infty \text{（あるいは } -\infty\text{）　または　} \lim_{x\to c-0} f(x) = +\infty \text{（あるいは } -\infty\text{）}$$

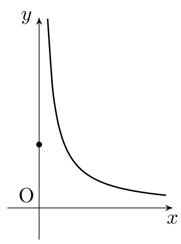
であるとき, 直線 $x = c$ は函数 $y = f(x)$ の漸近線であるといはれる.

例 4.12　定義域なるものにあまり拘泥する必要はないが, 論理に潔癖な読者が定義域を強く意識するならば, 漸近線の定義 4.11 の最後の部分に関して, 以下の様な例に触れておくとよい. いづれも, $x = 0$ が漸近線になつてゐる例である.

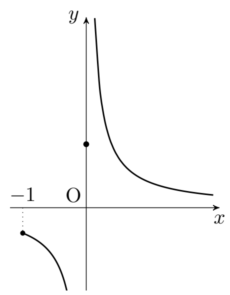
定義域 $I = (0, +\infty)$



定義域 $I = [0, +\infty)$



定義域 $I = [-1, +\infty)$



4.3. 1 次分数函数

定義 4.13 実数 a, b, c, d を定数とし, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ とする. このとき, 函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

を 1 次分数函数 と呼ぶ. 定義域は $-\frac{d}{c}$ を除くすべての実数である.

例題 4.14 次の函数の graph を描き, 逆函数を求め, さらに逆関数の graph も描け. 但し, 2 つの graphs は同一の座標平面に描くこと.

$$y = \frac{2x-3}{x-1}.$$

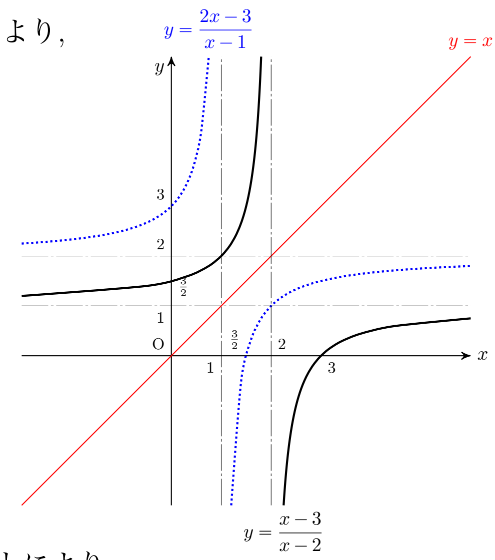
解答 まづ $(2x-3) \div (x-1)$ を計算することにより,

$$y = 2 - \frac{1}{x-1}, \quad \therefore \ y - 2 = \frac{-1}{x-1}. \tag{4.15}$$

これは

$$y = \frac{-1}{x} \quad \left(\text{つまり} \ (y+2) - 2 = \frac{-1}{(x+1)-1} \right) \tag{4.16}$$

を x 軸の方向に 1, y 軸の方向に 2 だけ平行移動させたものである. 実際, (4.16) 上の点 (x, y) に対して点 $(x+1, y+2)$ が (4.15) 上にあるからである. 特に, 漸近線は直線 $x = 1$ と直線 $y = 2$ である. 逆函数の graph は, 元の函数の graph と 直線 $y = x$ に関して対称になる ことも考慮に入れて描けば, 実線の graph になる.



また (4.15) で x と y を入れ換へて, 変形することにより,

$$y = \frac{x-3}{x-2}.$$

これが求める逆函数である. □

演 習 問 題

4.17 1 次分数函数 $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$ について答へよ.

(1) 元の函数の 2 つの漸近線の方程式を記せ.
(2) 元の函数の graph の x 軸および y 軸との交点の座標を記せ.
(3) 逆函数の方程式を求めよ.
(4) 逆函数の graph の x 軸および y 軸との交点の座標を記せ.
(5) 逆函数の 2 つの漸近線の方程式を記せ.
(6) 元の函数と逆函数の graph を同一の座標平面に描け.

4.18 次の函数の graph とその逆函数 graph の概形を 1 つの座標平面に描け.

(1) $y = \dfrac{x-3}{2x+1}$. (2) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

4.4.　函数の graph の描き方

函数の graph は computer 上で簡単に描けるが, 手計算だけで描けることも理論面で重要となる. そのためには, 様々なことについての理解が要求されるが, ここでは簡単にまとめておく.

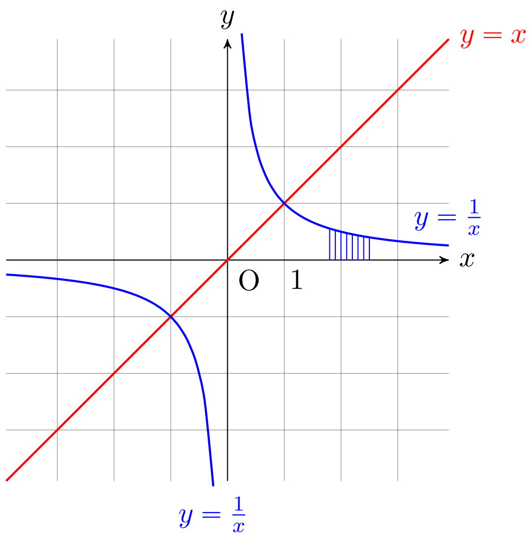
Graph を描くときの注意

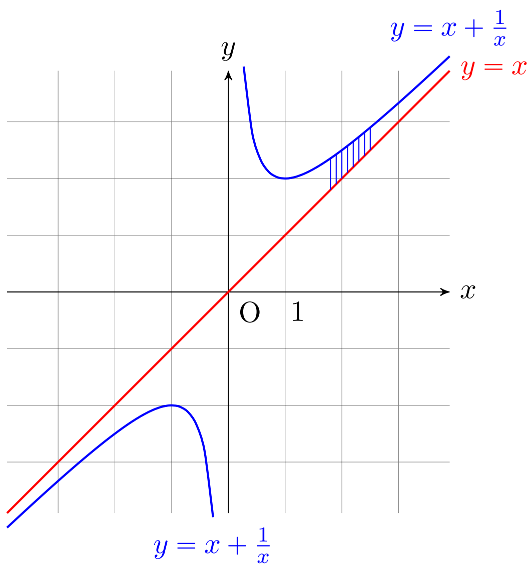
(1) x 軸, y 軸とその名前 x, y を記入.
（下記の (3)〜(4) の位置に鑑みて位置を決める必要がある.）
(2) 原点 O を記入.
(3) 漸近線など（骨格となる部分）を（graph より先に）描く.
(4) graph が x 軸や y 軸を交はる点の座標を記入.
(5) 極値（後の授業で述べる）を取る点の座標を記入.
(6) 対称性などにも注意して描く.
（偶函数の graph は y 軸に関して線対称. 奇函数の graph は原点に関して点対称など）

例題 4.19　〔= p.17, 1.3 [A]1(2)〕 ここでは, 函数

$$y = x + \frac{1}{x}$$

を例にとつて, graph の描き方を説明する. まづ, 高校で「数学 III」を学んだ人は, 増減表を作って, 描くことができる [10]. しかし, 以下の方法でもかなり正確に graph の形を捉へることができる. 即ち, $y = x$ の graph を描いておく. それに $y = \frac{1}{x}$ の graph を“上乗せする”.



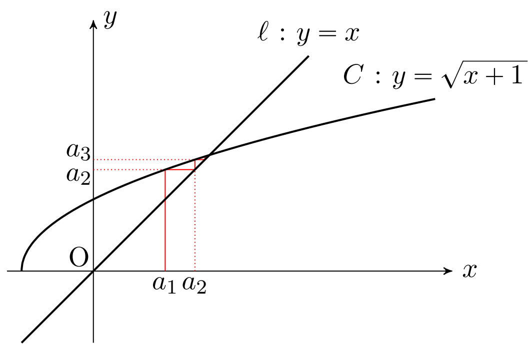


[10] これは, 本講義の先の方（8.16 など）でも更めて学ぶ.

例題 4.20 Graph を利用して数列が極限に近付く様子をみることができる. 例へば

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \quad (n \geqq 1)$$

について説明する. 座標平面上に曲線 $C : y = \sqrt{x+1}$ と直線 $\ell : y = x$ を描き, 点 a_1 から y 軸に平行に直線を引くとき C との交点は (a_1, a_2) である. この点から x 軸に平行に直線を引くとき ℓ との交点が (a_2, a_2) である. さらにこの点から y 軸に平行に直線を引くとき C との交点は (a_2, a_3) である. 以下同様にしていくと, これらの交点のなす点列の収束先 (α, α) の座標 α が与へられた数列の極限に他ならない.



一般に発散する数列についても同様な観察をすることができる. 読者には例へば上の数列の初項のみを換へて

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \quad (n \geqq 1)$$

について, 同様な作図を試られたい.

演 習 問 題

4.21 次の函数の graph を描け.

(1) $y = \sqrt{2x+1}$.

(2) $y = x - \dfrac{1}{x}$. 〔≒ 1.4A, 3(1)〕

(3) $y = \dfrac{x}{|x|}$.

(4) $y = \dfrac{|x+1|}{|x-1|}$.

(5) $y = |x| + x$.

§ 5. 初等函数

5.1. 三角函数

三角函数については, 高校で既習し, すでに登場してゐるが, ここでまとめておく [11].

> **定義 5.1** (三角函数) xy 座標平面で, 単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ について, $\mathrm{A}(1,0)$ から (x,y) までの弧に沿つた長さ $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ を θ とするとき (何周してゐても良い), x, y は θ の函数である. そこで
> $$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
> と定め, それぞれ (θ が変数) 余弦函数, 正弦函数, 正接函数と称する. これらは三角函数と称される函数の重要な一部である. この θ が, $\angle\mathrm{AOP}$ の弧度法による角の大きさに他ならない. これは radian と呼ばれる単位 (rad. と記す) で表記され, 一般に使用される角度 (単位は度 °) とは $180^\circ=\pi$ (rad.) で換算される.

本書では, 以下のこれらの函数の基本的な性質は理解してゐることを前提とする.
以下, 変数は θ でなく x を多く用ゐる.
$(\cos x)^2$, $(\sin x)^2$ をそれぞれ $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ と書くことが多い.

(1) 函数 $f(x)$ と定数 a が, 任意の x について $f(x+a)=f(x)$ を満たすとき, a を $f(x)$ の周期と呼ぶ. 函数 $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の正の最小の周期は 2π, 2π, π である.

(2) 定義から直ちに次の式が成り立つことがわかる:
$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,\quad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

(3) 特殊な x, 特に $x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ と, これらの整数倍の値における $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ の値は直ちに答へられなければならない. 覚えるよりも, その都度, 計算で得る方が望ましい. さらに, これらの函数の graph が正しく描けなくてはならない. 実際に描けることを確かめておいて欲しい.

(4) 函数 $\cos x$ は偶函数, $\sin x$ は奇函数である: $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$.

(5) 次の公式 (加法公式) が成り立つ.
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

(6) これらより, 2 倍角の公式, 半角の公式, 3 倍角の公式等が得られる:
$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x,\quad \sin(2x)=2\sin x\cos x,$$
$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},\quad \sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$
$$\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x,\quad \cos(3x)=4\cos^3 x-3\cos x.$$

[11] 厳密には, 弧の長さは曲線の長さの定義 (§33) によつて定義される. 弧の長さに基き角度の概念を得て, その上に三角函数が定義されので, 三角函数を厳密に定義するために積分が必要となる.

(6) <u>積和の公式</u>[12] を思ひ出しておく：

$$
\text{(5.2)}\qquad
\begin{aligned}
\sin\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\bigl(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\bigr),\\
\cos\alpha\,\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\bigl(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\bigr),\\
\sin\alpha\,\sin\beta &= -\tfrac{1}{2}\bigl(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\bigr),\\
\cos\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\bigl(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\bigr).
\end{aligned}
$$

(7) <u>和積の公式</u>[13] も思ひ出しておく：

$$
\text{(5.3)}\qquad
\begin{aligned}
\sin A+\sin B &= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),\\
\sin A-\sin B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right),\\
\cos A+\cos B &= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right),\\
\cos A-\cos B &= -2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right).
\end{aligned}
$$

演 習 問 題

5.4 次の各函数に対して (a), (b), (c) に答えよ.

(a) graph を書け.

(b) 最小の周期を求めよ.

(c) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲での x 軸とのすべての交点について, その x 座標を求めよ.

(1) $y = \sin(-2x)$.

(2) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(3) $y = \sin x + \cos x$. (Hint：三角函数の " 合成 " の方法を利用.)

[12] この名称は通称か. しかし, 簡明なよい名称である.

[13] この名称も通称. やはり, 簡明なよい名称である.

5.2.　逆三角函数

ここでは逆三角函数について説明する.

定義 5.5　(逆正弦函数, 逆余弦函数)

(1) 函数 $\sin x$ は, 区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を定義域とすれば単調増加であるから, 逆函数が存在する. それを逆正弦函数と呼んで, 次の記号で表す:

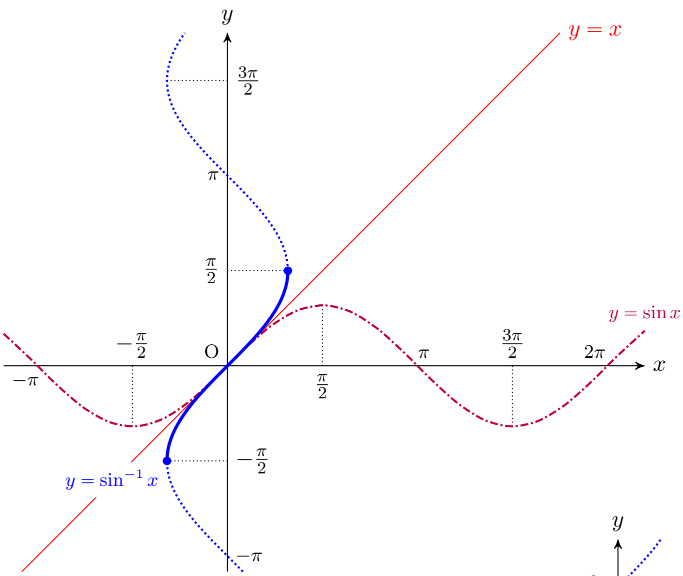
$$\sin^{-1}(x) \quad \text{または} \quad \mathrm{asin}(x) \quad \text{または} \quad \arcsin(x).$$

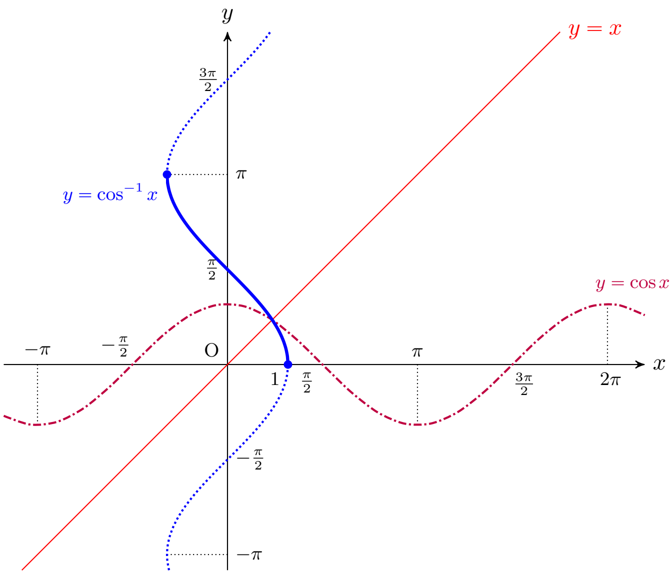
定義域は $[-1, 1]$ で, 値域は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ である. この函数は単調増加である.

(2) 函数 $\cos x$ は, 区間 $[0, \pi]$ を定義域とすれば単調減少であるから, 逆函数が存在する. それを逆余弦函数と呼んで, 次の記号で表す:

$$\cos^{-1}(x) \quad \text{または} \quad \mathrm{acos}(x) \quad \text{または} \quad \arccos(x).$$

定義域は $[-1, 1]$ で, 値域は $[0, \pi]$ である. この函数は単調減少である.

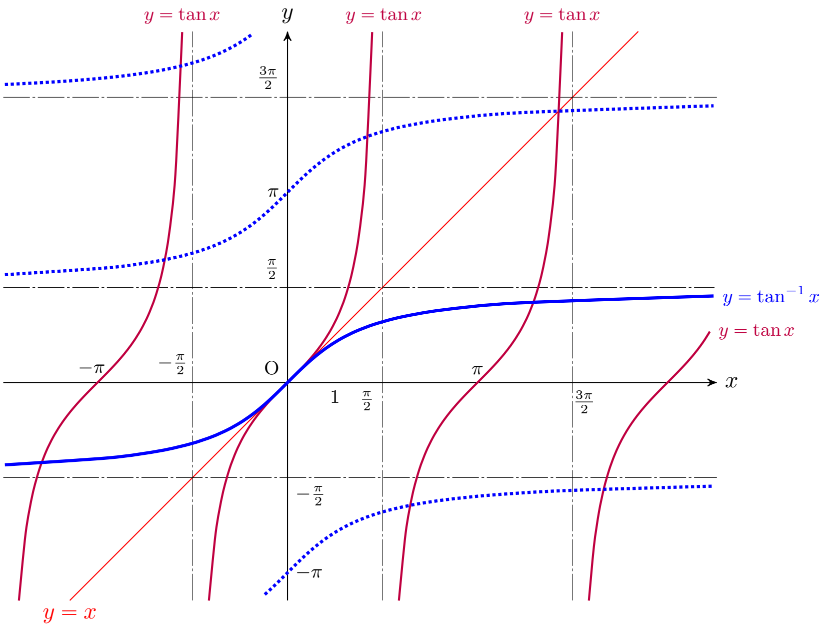




定義 5.6 区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を定義域としたとき, 函数 $\tan x$ は単調増加であり, これの逆函数が存在する. それを

$$\tan^{-1}(x) \quad \text{または} \quad \mathrm{atan}(x) \quad \text{または} \quad \arctan(x)$$

と書いて, <u>逆正接函数</u>と称する. 定義域は $(-\infty, \infty)$ である.



例題 5.7 $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\tan^{-1}\sqrt{3}$ の値を求めよ.

解答 $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \theta$ とおくと 定義からで

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

である. 従つて $\theta = \frac{\pi}{3}$ ······· Ans.
他方も同様に考へて, $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ である. □

演 習 問 題

5.8 次の等式が成り立つことを示せ:

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

5.9 次の値を求めよ.

(1) $\sin^{-1}\frac{1}{2}$.
(2) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$.
(3) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$.
(4) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$.
(5) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5.10 次の等式 (<u>Machin（マチン）の公式</u>) が成り立つことを示せ:

$$4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

5.3. 指数函数

x が有理数のとき $x = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N})$ と書けば, $a^x = a^{\frac{m}{n}}$ は, $a^m = b^n$ を満たす正の数 b として自然に定義される.

問 5.11 有理数の組 $r_1 < r_2$ について次を示せ.
(1) $0 < a < 1$ ならば $a^{r_1} > a^{r_2}$. (2) $a > 1$ ならば $a^{r_1} < a^{r_2}$.

定義と命題 5.12 1 でない実数 $a > 0$ と任意の実数 x に対し, a の冪乗

$$a^x \qquad (a \text{ を底とする } \underline{\text{指数函数}})$$

が自然に定義される. この函数は $a > 1$ ならば単調増加であり, $0 < a < 1$ ならば単調減少である.

証明 $a > 1$ の場合. $x \in \mathbb{R}$ に対し, x に収束する単調増加数列 $\{r_n\}$ $(r_n \in \mathbb{Q})$ を選び,

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \tag{5.13}$$

と定義する. 実際, $\mathbb{Q} \ni x \mapsto a^x$ の単調性, 即ち, 5.11(2) より, この極限値は存在し, しかも, その極限値は数列 $\{x_n\}$ の選び方に依らないこともわかる [14]. さらに, 再び 5.11(2) と 2.16 より, $a > 1$ の場合は, 実数の組 $x_1 < x_2$ について $a^{x_1} \leqq a^{x_2}$ であることが示されるが, ここで等号の不成立を示す必要がある. それは, $x_1 < q_1 < q_2 < x_2$ なる $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ をとつておき, 単調増加で x_1 に収束する数列 $\{r_n\}$ $(r_n \in \mathbb{Q})$ と単調減少で x_2 に収束する数列 $\{s_n\}$ $(s_n \in \mathbb{Q})$ をとれば $x_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \leqq a^{q_1} < a^{q_2} \leqq \lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = x_2$ と示される. $0 < a < 1$ についても同様. □

命題 5.14 任意の正の数 a, b と実数 x, y について

$$a^x b^x = (ab)^x, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

が成り立つ. これらをまとめて $\underline{\text{指数法則}}$ と呼ぶ.

証明 x, y が有理数のときは, 定義に戻れば容易に示される. (問とする) 一般には, 実数 x, y に対し, 第 2 の等式 $a^x a^y = a^{x+y}$ を示そう. これらに収束する有理数からなる数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ をとれば,

$$a^{x_n} a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$$

が成り立つ. よつて 2.18 と 5.14 を交互に使つて

$$\begin{aligned}
a^x a^y &= \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{y_n} \quad (\because 5.13) \\
&= \lim_{n\to\infty} a^{x_n} a^{y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n} \\
&= a^{\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n)} \quad (\because 5.13) \\
&= a^{x+y}
\end{aligned}$$

と示される. その他の等式も同様に示される (各自試されたい). □

[14] この辺りの詳細については [6], 第 2 章, §12 を参照されたい.

5.4. 対数函数

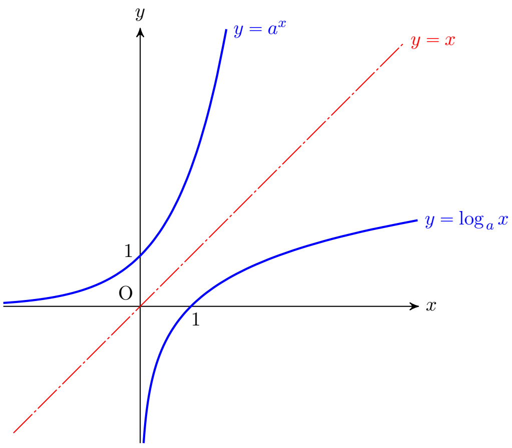
指数函数 $y = a^x$ は逆函数を持つが, 既知の函数だけでは x を y で表すことができない. そのため, 新たな記法を用意することが必要となる.

定義と命題 5.15 a を 1 でない正の定数とする. 指数函数 $y = a^x$ の逆函数を

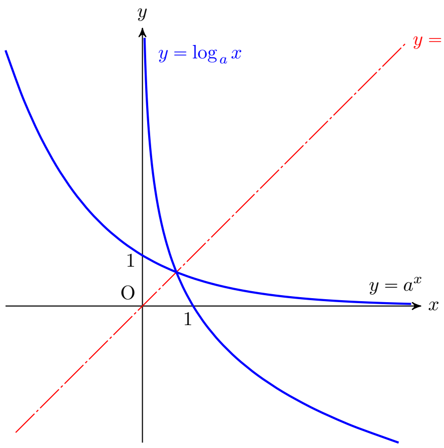
$$x = \log_a y \quad (y > 0)$$

と記し, a を底とする対数函数と呼ぶ. この函数は $a > 1$ ならば単調増加であり, $0 < a < 1$ ならば単調減少である.

証明 証明すべきは, 単調性であるが, これは, 指数函数の単調性からすぐにわかる. □



$a > 1$ の場合の a^x と $\log_a x$ の graphs



$0 < a < 1$ の場合の a^x と $\log_a x$ の graphs

$0 < a < 1$ または $1 < a$ とする. 逆函数の定義と $a^0 = 1$ から

$$\log_a 1 = 0$$

である. また $b = a^B$, $c = a^C$ とおくと, $B = \log_a b$, $C = \log_a c$ である. ここで $a^{B+C} = a^B a^C = bc$ から, $B + C = \log_a bc$. よって

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$$

逆函数の基本的な性質から,

(5.16) $$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x \quad (\text{逆函数との合成函数}).$$

さらに, $c^{\log_c b} = b = a^{\log_a b} = (c^{\log_c a})^{\log_a b} = c^{(\log_c a)(\log_a b)}$ より, 次の等式が成り立つ:

(5.17) $$\log_c b = (\log_c a)(\log_a b), \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{底の変換公式}).$$

5.5.　指数函数と対数函数の基本性質のまとめ

ここまでに述べた性質をまとめておく. 証明も含めて再確認しておきなさい.

命題 5.18　(指数函数のまとめ)　a は正の定数で, $a \neq 1$ とする. 函数 $y = a^x$ は実数全体で定義された函数であり, 至るところで連続であり, 以下の性質を持つ.

(1)　$a^0 = 1$, $a^1 = a$.

(2)　$a > 1$ のとき,　$x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.

(3)　$0 < a < 1$ のとき,　$x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

(4)　$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$.

(5)　$b = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$ のとき,　$a^b = \sqrt[n]{a^m}$.

(6)　$a^b a^c = a^{b+c}$.

(7)　$(a^b)^c = a^{bc}$.

命題 5.19　(対数函数のまとめ)　a は正の定数で 1 でないとする. 函数 $y = \log_a x$ の定義域は $(0, \infty)$ であり, 至るところで連続であり, 以下の性質も持つ.

(1)　$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

(2)　$a > 1$ のとき,　$x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

(3)　$0 < a < 1$ のとき,　$x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

(4)　$a^{b \log_a c} = (a^{\log_a c})^b = c^b$.

(5a)　$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.　　(5b)　$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

(6)　$\log_a b^c = c \log_a b$.

(7)　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　(底の変換公式. 5.17 を見よ.).

5.6.　初等函数の分類

定義 5.20　以下の様に函数を分類する.

(1)　2 つの多項式の商として表される函数を <u>有理函数</u> と呼ぶ.

(2)　有理函数, 冪乗根, 指数函数, 対数函数, 三角函数, 逆三角函数の有限回の和差積商および合成によつて表される函数を, <u>初等函数</u> と呼ぶ.

(3)　初等函数ではあるが, 有理函数, 冪乗根の有限回の和差積商および合成によつては表し得ない函数を, <u>初等超越函数</u> と呼ぶ.

微分積分学は, これらの函数を扱ふ理論であるともいへる.

第 2 章　1 変数函数の微分法

§ 6.　函数の極限

6.1.　函数の極限

定義 6.1　以下の様に函数の極限について定義する：
(1)　開区間 I から 1 点 $a \in I$ を除いた集合 $I - \{a\}$ で定義された函数 $f(x)$ について [15], $x \in I$ が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が ℓ に限りなく近づくならば,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \ell \ \ (x \to a)$$

と書き, $f(x)$ の a における <u>極限</u> は ℓ であるといふ.
(2)　開区間 $I = (c, +\infty)$ で定義された函数 $f(x)$ について, $x \in I$ が限りなく増大するとき, $f(x)$ が ℓ に限りなく近づくならば,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \ell \ \ (x \to \infty)$$

と書き, $f(x)$ の $x \to +\infty$ における <u>極限</u> は ℓ であるといふ.
(3)　その他,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \ell \ \ (x \to -\infty) \ \ \text{や}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow +\infty \ \ (x \to \infty)$$

などもあるが, 詳しく述べる必要はないであらう.

注意 6.2　6.1 (1) の厳密な定義は以下の通り. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し,

$$x \in I, \ \ 0 \neq |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

が成り立つとき, $f(x)$ の a における極限は ℓ であるといはれる.
(2) を正確に述べると以下の様になる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $M > 0$ が存在し,

$$x \in I, \ \ x > M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

が成り立つとき, $f(x)$ の a における極限は ℓ であるといはれる.

注意 6.3　上の 6.2 の $|f(x) - \ell|$ を 6.1 の $f(x)$ と考へて, そこの ℓ が 0 であるとみれば, $\big||f(x) - \ell| - 0\big| = |f(x) - \ell|$ だから

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \ \Leftrightarrow \ \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$$

などが成り立つことがわかる.

[15] 以降, この言い回しは $f(x)$ は a でも定義されてゐる場合も含みを持つものとする.

以下の様な極限の概念もある.

定義 6.4　片側極限と総称される概念を以下の様に定義する.

(1)　(空でない) 開区間 (a,c) で定義された函数 $f(x)$ について, x が a より大きな値をとりながら a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が ℓ に限りなく近づくならば, そのことを

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\ell \quad \text{または} \quad f(x)\longrightarrow \ell \;\; (x\to a+0)$$

と書いて, $f(x)$ の a における右極限は ℓ であるといふ.

(2)　(空でない) 開区間 (c,a) で定義された函数 $f(x)$ について, x が a より小さな値を取りながら a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が ℓ に限りなく近づくならば, そのことを

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\ell \quad \text{または} \quad f(x)\longrightarrow \ell \;\; (x\to a-0)$$

と書き, $f(x)$ の a における左極限は ℓ であるといふ.

(3)　∞ や $-\infty$ に発散する場合も同様な記法を用ゐる.

注意 6.5　6.4 (1) $\lim_{x\to a+0} f(x)=\ell$ の厳密な定義. 任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して,

$$a<x<c,\;\; x-a<\delta \implies |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

となることである. $\lim_{x\to a-0} f(x)=\ell$ については述べるまでもないであらう.

命題 6.6*　開区間 I は定点 $a\in\mathbb{R}$ を含むとする. I から a を除いた集合上で定義された函数 f について, $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ であるためには, f の定義域内の点からなる a に収束する様な任意の数列 $\{x_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\ell$$

となることが必要十分である. 同様なことが片側極限でも成り立つ.

証明　必要性. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ が存在して

$$x\in I,\;\; 0\neq|x-a|<\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

一方, 仮定にある様な数列 $\{x_n\}$ については, $N\in\mathbb{N}$ が存在して,

$$n>N \;\Rightarrow\; |x_n-a|<\varepsilon.$$

この 2 つを合はせると $n>N \Rightarrow |f(x_n)-\ell|<\varepsilon$ がわかる. これは結論の成立を意味する.

十分性. 背理法で示す. 結論を否定すると, 極限の定義により, ある $\varepsilon_0>0$ については, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し, $x_n\in I$ が存在して

$$0\neq|x_n-a|<1/n \;\; \text{かつ} \;\; |f(x_n)-\ell|\geqq\varepsilon_0$$

となる. このとき数列 $\{x_n\}$ について, $x_n\to a$ なのに $f(x_n)\to\ell$ ではない.

片側極限については, 読者に証明を試みられたい. □

命題 6.7* $\lim_{x\to a} f(x)$ の極限値が存在して ℓ であるためには, 右極限値と左極限値がともに存在し, かつ, ともに ℓ であることが必要十分である. 即ち,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \ell.$$

証明 それぞれの厳密な言明 6.2, 6.5 と

$$0 \neq |x-a| < \delta \iff 0 < x-a < \delta \text{ または } 0 < x-a < \delta$$

であることから, 容易に示される. □

命題 6.8* 開区間 I は定点 $a \in \mathbb{R}$ を含むとする. 2 つの函数 f と g は I から a を除いた集合上で定義されてゐるとせよ. c を任意の定数とする. さらに, 極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ と $\lim_{x\to a} g(x)$ が存在するとする. このとき,

$$\lim_{x\to a} c\,f(x), \quad \lim_{x\to a} \bigl(f(x)+g(x)\bigr), \quad \lim_{x\to a} \bigl(f(x)g(x)\bigr)$$

も存在し, 以下の等式が成り立つ:

$$\lim_{x\to a}(c\,f(x)) = c \lim_{x\to a} f(x), \tag{6.9}$$

$$\lim_{x\to a} \bigl(f(x)+g(x)\bigr) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \tag{6.10}$$

$$\lim_{x\to a} \bigl(f(x)\,g(x)\bigr) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x). \tag{6.11}$$

上の仮定に加へて $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ が存在し,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \tag{6.12}$$

が成り立つ.

証明 c 倍に関する等式については (2.19) を使へばわかる. 和については (2.20) を使へばわかる. 積, 商については, それぞれ (2.21), (2.22) を使へばわかる. □

命題 6.13* 開区間 I は定点 $a \in \mathbb{R}$ を含むとする. 2 つの函数 f と g は I から a を除いた集合上で定義されてゐるとせよ. この定義域で $f(x) < g(x)$ であり, 極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ と $\lim_{x\to a} g(x)$ の双方が存在するとする. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x).$$

同様のことが片側極限についても成り立つ.

証明 a に収束し, 各項が I に含まれる様な任意の数列 $\{x_n\}$ について, 任意の n について $f(x_n) < g(x_n)$ が成り立つから, 2.16 によつて

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqq \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

である. ここで 6.6 を使へば, この左辺と右辺はそれぞれ $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ であるから, 所望の不等式が成り立つ. □

例題 6.14 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$. (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}$.

解答 (1) $x\to 2$ のとき, 分母子の極限値が 0 なので, 分母子は $(x-3)$ を因数に持ち,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+3}=\frac{3}{5} \quad \cdots\cdots\ \text{Ans.}\end{aligned}$$

である.

(2) $x\to 0$ のとき, 分母子の極限値が 0 なので, 分母を有理化して

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{x\to 2}\frac{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-x})}{3x}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-x}}{3}=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots\ \text{Ans.}\end{aligned}$$

である. □

注意 6.15 上の 6.14 の様に分母子の極限がともに 0 である場合を $\frac{0}{0}$ 型の不定形と呼ぶことがある.

演 習 問 題

6.16 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{2x^2-x-1}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-3^x}{3^{3x+1}+2\cdot 3^x-5}$.

6.17 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$ を求めよ. (Hint: 6.13 を利用する.)

6.2. 函数の連続性

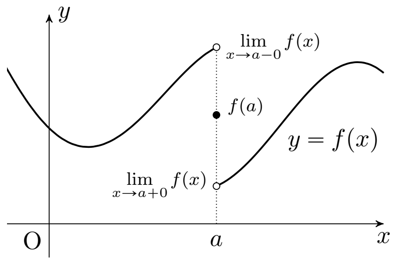
定義 6.18 a を含む区間 I で定義された函数 $f(x)$ について,
(1) a が I の境界点ではない場合,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ (つまり, } a \text{ における極限値と } a \text{ での値が一致)}$$

が成立するならば, $f(x)$ は a において連続であるといはれる.
(2) a が I の左側［右側］の境界点の場合, a における右極限値［左極限値］と a での値が一致するとき, 即ち

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \left[\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \right]$$

が成立するならば, $f(x)$ は a において連続であるといはれる.



(3) 任意の $a \in I$ において $f(x)$ が連続ならば, $f(x)$ は I で連続であるといはれる.

補題 6.19* a を含む区間 I で定義された函数 $f(x)$ が $x = a$ で連続で, $f(a) = \ell$ であるためには, a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ $(a_n \in I)$ について,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell \ \left(= f\Bigl(\lim_{n\to\infty} a_n\Bigr)\right)$$

であることが必要十分である.

証明 連続性の定義と 6.6 とから直ちにわかる. □

命題 6.20* 区間 I で連続な 2 つ函数 $f(x)$ $g(x)$ と定数 c について

$$c\,f(x), \quad f(x) + g(x), \quad f(x)\,g(x)$$

も I において連続である. さらにすべての $x \in I$ について $g(x) \neq 0$ であれば, $\frac{f(x)}{g(x)}$ も I において連続である. $f(I)$ を定義域とする逆函数 $f^{-1}(x)$ が存在すれば (つまり, f^{-1} が $f(I)$ から I への 1 対 1 の写像であれば), f^{-1} は $f(I)$ において連続である.

証明 最後の主張以外は連続性の定義と 6.8 から直ちにわかる. $f^{-1}(x)$ の連続性について. 任意の $b \in f(I)$ をとり固定する. I を小さくして I は $b \in f(I)$ となる有界な区間であるとしてよい. 各項が $f(I)$ に属し, b に収束する任意の数列 $\{b_n\}$ を考へる. 数列 $\{f^{-1}(b_n)\}$ は $f^{-1}(b)$ に収束する. もしさうでないとすると, I が有界な区間ゆゑ, 数列 $\{f^{-1}(b_n)\}$ の部分数列[16] で $a\,(\neq f^{-1}(b))$ に収束するものが存在する. それを $\{f^{-1}(b_{j_n})\}$ と書く: $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(b_{j_n}) = a$. $b_{j_n} = f\bigl(f^{-1}(b_{j_n})\bigr)$ であり f は連続だから

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{j_n} = \lim_{n\to\infty} f\bigl(f^{-1}(b_{j_n})\bigr) \underset{6.19}{=} f\Bigl(\lim_{n\to\infty} f^{-1}(b_{j_n})\Bigr) = f(a)$$

となるが f は 1 対 1 の写像であるから $a = f^{-1}(b)$ となつて矛盾である. □

[16] 元の数列からいくつか（無限個でもよい）の項を抜き取つて残された, 無限個の項からなる様な数列のこと.

命題 6.21* (中間値の定理) 閉区間 $[a,b]$ で連続な函数 $f(x)$ に対し, $f(a)\neq f(b)$ とする. ℓ を $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の数とせよ. 但し ℓ は $f(a)$ または $f(b)$ と一致しないものとする. このとき $\ell=f(c)$ かつ $a<c<b$ となる c が存在する.

証明 (i) まず $f(a)<f(b)$ の場合に証明する.

Step 1. $A=\{x\,;a\leqq x\leqq b, f(x)<\ell\}$ とおく. $a\in A$ だから A は空集合ではない. $\sup A=x_0$ とおく. 以下に $f(x_0)=\ell$ となることを証明する.

Step 2. まず, 上限の定義から, 各 $n\in\mathbb{N}$ について

$$x_0-\frac{1}{n}<x_n\leqq x_0,\quad x_n\in A$$

なる x_n が存在する. これにより数列 $\{x_n\}$ が得られたが, 定め方より

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad f(x_n)<\ell$$

である. f は連続であるから 6.19 と 2.16 によつて

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0),\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)\leqq\ell$$

である. これより特に $x_0<b$ でなくてはならない.

Step 3. 次に数列 $\{x_n'\}$ を $x_n'=x_0+\frac{1}{n}$ で定義する. 有限個の項を除いて $a<x_n'<b$ であり, $x_0<x_n'$ でもあるから, x_0 の定義から $\ell\leqq f(x_n')$. これらのことから, Step 2 と同様に

$$\ell\leqq\lim_{n\to\infty}f(x_n')=f(x_0)$$

がわかる.

Step 4. 以上から $\ell=f(x_0)$ でなくてはならない. 特に $a\neq x_0$ である. つまり x_0 が所望の c としてとれる.

(ii) $f(a)>f(b)$ の場合も同様に証明できる. □

命題 6.22* 有界閉区間を定義域とする連続函数は最大値, 最小値を有する. 〔= 定理 1.7〕

証明 主張にある有界閉区間と函数をそれぞれ I, $f(x)$ とする. 最大値が存在することを示すため, $M=\sup\{f(x)\,|\,x\in I\}$ とおく.

(i) $M\in\mathbb{R}$ のとき, 上限の定義により I の点からなる数列 $\{a_n\}\subset I$ が存在して, $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=M$ となる. しかるに, この数列の項はすべて有界な区間 I 内の点なので, 収束する部分数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3},\cdots$ が存在し, I は閉区間ゆゑ, その極限値 a は I に属する [17]. $f(x)$ が a で連続であるから $f(a)=\lim\limits_{i\to\infty}f(a_{n_i})=M$ である. よつて M が最大値である. 最小値についても全く同様に示される.

(ii) $M=\infty$ のとき, (i) と同様に, I のある値 (a とする) に収束する数列 $\{a_n\}\subset I$ が存在して $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=+\infty$ となるが, これは $f(x)$ が a で連続であることに反する. □

[17] I を 2 等分, 4 等分, 8 等分と分割していくとき, 各段階で $\{a_n\}$ の項を無限個含む小区間が少くとも 1 つ存在するので, 各段階でその様な小区間を 1 つづつ選ぶ. さらに, その中に属する項を番号が小から大になる様に 1 つづつ得らべば, それが求める $\{a_{n_i}\}$ の一例である. ここで, 小区間は 1/2, 1/4, 1/8, $\cdots$ と幅が 0, つまり 1 点に縮んでゆく. その 1 点が極限値であり, もちろん I に属する.

命題 6.23* 2 つの連続函数の合成函数は連続である．〔= 定理 1.8〕

証明 主張の合成函数を 2 つの連続函数 $y = f(x)$ と $g(y)$ の合成函数 $g(f(x))$ とせよ．定義域内の a に収束する定義域内の点からなる任意の数列 $\{a_n\}$ について, 仮定と 6.19 から $g(f(a_n))$ は極限値 $g(f(a))$ を持つことが示される．（問 6.24 とする．） □

問 6.24 上の 6.23 の証明の詳細を記述せよ．

命題 6.25* 区間を定義域とする連続函数の像は区間である．区間を定義域とする連続な狭義単調函数は連続で狭義単調な逆函数を持つ．

証明 前半について．定義域を I として, 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して区間 $[f(x_1), f(x_2)]$ が値域に含まれることがわかればよい．よつて定義域を I として, 任意の $x_1, x_2 \in I$ および $f(x_1)$ と $f(x_2)$ の間にある任意の c に対して $f(\xi) = c$ となる $\xi \in I$ が存在することが示されればよい．これは 6.21 からわかる．後半の証明は述べるまでもないであらう． □

命題 6.26* 指数函数 a^x, 対数函数 $\log_a x$, 三角函数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, 逆三角函数 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ はすべて定義域において連続函数である．

証明 まづ a^x の定義 (5.13) と $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ $(n \to \infty)$ により, $x_n \to 0$ なる任意の数列 $\{x_n\}$ について $a^{x_n} \to 1$ $(n \to \infty)$ がわかる．これから a^x は $x = 0$ で連続である．あとは指数法則 5.14 から $x_n \to x$ のとき $x_n - x \to 0$ ゆゑ, 次がわかる：

$$a^{x_n} = a^{x_n - x} a^x \longrightarrow 1 a^x = a^x \quad (n \to \infty).$$

$\sin x$ については, 任意の a について

$$|\sin(a+h) - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) \right| \leqq 2 \cdot \left| \frac{h}{2} \right| \cdot 1 = h$$

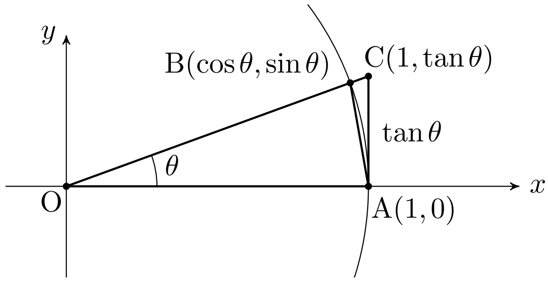
ゆゑ（6.3 により）$h \to 0$ のとき $\sin(a+h) \to \sin a$ である．$\cos x$ の連続性も同様に示される．あとは 6.20 によればよい． □

6.3. 三角函数に関する基本の極限公式

三角函数の導函数を調べるのには, 次の基本的な事実を利用する.

補題 6.27 以下が成り立つ：
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

証明 まづ, θ が正で十分小さいとする.
座標平面上に下図の様に単位円を描き, 点 O, A, B, C をとる. 面積の比較において



$$\triangle\mathrm{OAB} < \text{扇型 OAB} < \triangle\mathrm{OAC}.$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \theta < \frac{1}{2}\tan\theta.$$
$$\therefore\ 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

この不等式は θ が負のときも成り立つことが同様にして示される. ここで $\theta \to 0$ のとき $\cos\theta \to 1$ なので,
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} = 1.$$
ここで 6.13 を使へば
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$
がわかり, 与式が成り立つ. □

6.27 は後に 11.1 などで利用される.

演 習 問 題

6.28 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}$.　(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$.　(5) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$.　(6) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} 2x}{\sin x}$.

6.4. 函数の極限としての Napier の数

数 e は函数の極限としても表される.

補題 6.29 次が成り立つ：

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to-\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

証明 <u>第 1 の等式.</u> 各 $x>1$ について, 自然数 n を $n \leqq x < n+1$ で定める. このとき

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{n}.$$

この式から,

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leqq 1+\frac{1}{n}$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x.$$

これの左辺と右辺から延長して,

$$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

であるから,

$$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$x\to\infty$ のとき, n についても $n\to\infty$ なので, この両辺はいづれも e に収束する (左辺の極限は $\frac{e}{1}=e$, 右辺の極限は $e\cdot 1 = e$). よつて, 目的の $(1+\frac{1}{x})^x$ も e に収束する.
<u>第 2 の等式.</u> $x=-z$ とおくと, $z\to-\infty$ ゆゑ, $x-1\to\infty$ である. このとき,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z &= \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x \\ &= \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \longrightarrow e\cdot 1 = e\end{aligned}$$

となり, 第 2 の等式も示された.
<u>第 3 の等式.</u> 第 1, 第 2 の等式で $t=\frac{1}{x}$ あるいは $t=\frac{1}{z}$ とおくと,

$$\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e, \quad \lim_{t\to-0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

がわかる. ここで 6.7 を使へば,

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

を得る. □

演 習 問 題

6.30 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}}$. (2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{3}{t}\right)^t$. (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}$ （$a\neq 0$ は定数）.

§ 7. 微分係数と導函数

7.1. 微分係数と接線

定義 7.1 開区間 I で定義された函数 $f(x)$ と $a \in I$ について, 極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \left(=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

が存在するとき, これを $f'(a)$ と書いて, $x=a$ における $f(x)$ の微分係数と称する. 即ち,

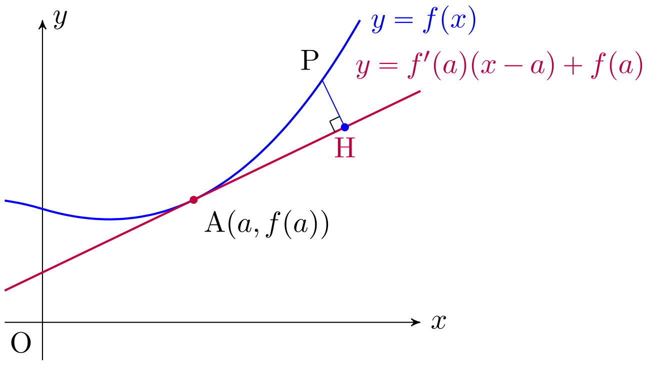
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

定義 7.2 ([2] の定義) 開区間 I で定義された函数 $y=f(x)$ の graph C 上の点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ と, A を通る直線 ℓ について,

$$\lim_{\mathrm{PA}\to 0}\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PA}}=0 \tag{7.3}$$

が成り立つとき, ℓ を C の, 点 A における接線と称する. ここに, 点 P は ℓ 上の動点で, 点 H は A から ℓ に下した垂線の足である.

注意 7.4 (1) 7.2 の定義は以下の様に理解するとよい. 点 P は基点 A に近いとする. ℓ 上に P を“近似”する点 H をとる. P から近似点 H までの距離が, P から A までの距離と比較して, 圧倒的に非常に小さい, といふのが, (7.3) の意味するところである. つまり, P が A に近づく速さで A を中心に図を拡大していくと, あたかも P が H に擦り寄つていく様に見える.



(2) そもそも, ほとんどの人が最初に接線といふ言葉を知るのは「円の接線」としてである. そのときは「共有点が唯一つ」といふ特徴で理解する. 一方,「一般の曲線の接線」は, 高校で微積分を学ぶときに, 初めて登場するが, その際, 円の接線といふ概念との整合性は説明されない [18]. 念のため説明しておく. 円 (半径 r とする) とその上にある点 A が与へられたとき, 適当に座標をとると, A の座標は $(0, r)$ で, A の付近での円の方程式は $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と書けるから, 上の定義をあてはめれば (遅くても第 9 節を終はつたときには), 通常の意味の接線 $y=r$ が 7.2 の意味の接線だと確認できる.

[18] 高校の教科書を御覧いただきたい. 事実, 高校生だつた頃の筆者にはこれがとても不満であつた.

命題 7.5* 7.1 の状況において, 直線

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

は, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\, f(a))$ におけるこの曲線の接線である.

証明 7.2 と同様に点 $(a,\, f(a))$ を A とする. 曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\, f(x))$ をとり, 求める接線の方程式を $mx + ny = d$ $(n \neq 0)$ とする. P から接線へ下した垂線の足を H と書く. このとき,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PA}} &= \frac{\dfrac{|\,mx + nf(x) - d\,|}{\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-f(a))^2}} \qquad \text{(高校で学んだ点と直線の距離の公式利用)}\\
&= \frac{\dfrac{|\,(mx + nf(x) - d) - (ma + nf(a) - d)\,|}{\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-f(a))^2}}\\
&= \frac{\dfrac{|\,(m(x-a) + n(f(x) - f(a))\,|}{\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-f(a))^2}}\\
&= \frac{\dfrac{\left|m + n\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|}{\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^2}} \longrightarrow \frac{\dfrac{|\,m + n\,f'(a)\,|}{\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{1+f'(a)^2}} \qquad (\,|\,x-a\,| \longrightarrow 0\,).
\end{aligned}$$

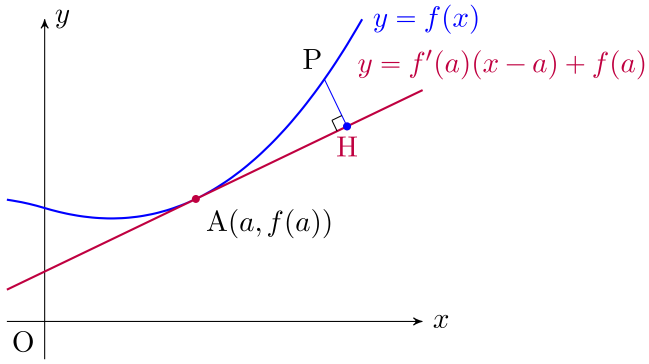


図 7.6 Graph 上の 1 点における接線

これと接線の定義 (7.3) によつて

$$m + n\,f'(a) = 0. \qquad \therefore \quad m = -n\,f'(a)$$

でなければならない. 従つて求める接線は

$$-f'(a)x + y = \frac{d}{n}$$

と書ける. これが点 $(a,\, f(a))$ を通るから, 主張の方程式が得られる. □

7.2. 微分係数から導函数へ, 導函数の基本公式

次に, 7.1 における a を変化させて, 次の定義をする.

定義 7.7 開区間 I で定義された函数 $f(x)$ と任意の $a \in I$ について, 極限

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するとき (このとき $f(x)$ は I で微分可能と称する), I 上の函数 $x \longmapsto f'(x)$ が得られる. これを $f(x)$ の導函数と称して $f'(x)$ で表す. このことを,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

と表す. ここで Δx は伝統的な計算用の記法である.

例 7.8 定数函数 $f(x) = c$ については

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

である.

命題 7.9 開区間 I で微分可能な 2 つの函数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ について, 次の等式が成り立つ: ((1) と (2) を合はせて微分の線形性と称する.)

(1) $(u+v)' = u' + v'$.

(2) 定数 c について, $(cu)' = cu'$.

(3) (積の微分公式)

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad \big(\ (uv)' = u'v + uv'\ \big).$$

(4) (商の微分公式) $g(x) \neq 0$ である x について,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \left(\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ \right).$$

証明 (1) と (2) の証明:

$$\frac{\big(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

$$\frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

である. ここで $\Delta x \to 0$ として (1), (2) の等式を得る.

(3) の証明:

$$\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x+\Delta x) + f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\, g(x+\Delta x) + f(x)\, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).
\end{aligned}$$

(4) の証明. まづ, $g(x) \neq 0$ であれば, その様な x の付近において, 函数 $g(x)$ は 0 にはならないことに注意せよ.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x)\,g(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x)\,g(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,g(x) - f(x)\,\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)\,g(x)} \\
&= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

となり証明された. □

命題 7.10 次の式が成り立つ:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \qquad \left(\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}\right).$$

証明 7.8 と 7.9(4) から直ちにわかる. □

命題 7.11 n が 0 または自然数のとき,

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}.$$

証明 $(x+\Delta x)^n$ を 2 項展開 2.28 を利用して展開して示す.

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\,\Delta x + \tfrac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

であるが, この右辺の第 3 項以降はすべて $(\Delta x)^2$ で割り切れることに注意すると,

$$\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x\big(\tfrac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2} + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-3} + (\Delta x)^{n-2}\big)$$

となる. ゆゑに $\Delta x \to 0$ のとき,

$$\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \longrightarrow nx^{n-1}$$

となり, 証明が終はる. □

問 7.12 7.11 には様々な証明がある. 7.11 を次のそれぞれの方法で証明せよ.

(1) 7.9 (3) を使つて n に関する数学的帰納法で.

(2) 因数分解

$$X^n - Y^n = (X-Y)(X^{n-1} + X^{n-2}Y + \cdots + XY^{n-2} + Y^{n-1})$$

が正しいことを示し, これを利用して. 〔⇒ p.28, 定理 1.11 の証明〕

例題 7.13 函数 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+3}$ について答へよ.

(1) 導函数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(0, -\frac{1}{3})$ における, この曲線の接線の方程式を求めよ.

解答 (1) 主に 7.9(4) 商の微分 を使つて

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+x+3) - (x-1)(2x+1)}{(x^2+x+3)^2} = \frac{-x^2+2x+4}{(x^2+x+3)^2} \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}$$

(2) $f'(0) = \frac{4}{9}$ だから, 求める接線の方程式は

$$y + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{9}(x-0). \quad \therefore\ y = \tfrac{4}{9}x - \tfrac{1}{3} \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}$$

である. □

演 習 問 題

7.14 次の曲線の点 A における接線の方程式を求めよ.

(1) $y = 3x+1,\quad \mathrm{A}(1,4).$

(2) $y = x^2+3x,\quad \mathrm{A}(-2,-2).$

(3) $y = x^3-x+2,\quad \mathrm{A}(1,2).$

(4) $y = \dfrac{4x}{x+1},\quad \mathrm{A}(1,2).$

(5) $y = 1+\sqrt{x},\quad \mathrm{A}(4,3).$

7.15 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $3x+2.$

(2) $x^2+3x+7.$

(3) $(x^2+x+4)(x^2-x+1)$

(4) $1+2x^{-1}+x^{-2}.$

(5) $\dfrac{2x-1}{x+1}.$

(6) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}.$

(7) $\dfrac{x^2+3}{x^3+x^2+2}.$

(8) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$

(9) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}.$

§ 8. 極値, 平均値の定理, l'Hôpital の定理

8.1. 極値

定義 8.1 開区間 I で定義された函数 $f(x)$ と $a \in I$ について, a のある近傍（定義は 1.15 を見よ）$J\,(\subset I)$ において $f(a)$ のみが最大値であるとき, 即ち

$$x \in J,\ x \neq a \implies f(x) < f(a)$$

が成り立つとき, $f(x)$ は a において極大である, 或いは, 極大値 $f(a)$ をとる, といはれる. 同様に, 最小値であるとき, 極小である, 或いは, 極小値 $f(a)$ をとる, といはれる. つまり, 極大値, 極小値とは局所的な最大値, 最小値のことである. 極大値と極小値を総称して極値といふ.

命題 8.2 開区間 I で定義された微分可能な函数 $f(x)$ が $x = a$ で極値を持てば $f'(a) = 0$ である.

証明 $f(a)$ が極大である場合. a のある近傍 J において $f(a)$ が最大値である. ゆゑに h が十分小さければ $f(a+h) - f(a) < 0$ であるよつて, 6.7 と 6.13 により

$$f'(a) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqq 0, \qquad f'(a) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqq 0$$

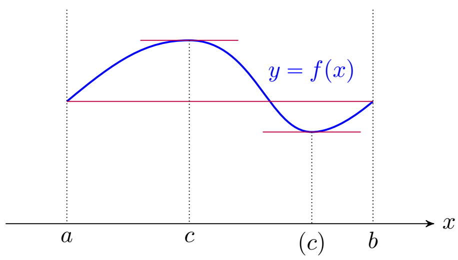
が成り立つので $f'(a) = 0$ でなくてはならない. □

8.2. 平均値の定理

定理 8.3★ (Rolle の定理) 函数 $y = f(x)$ は, 区間 $[a,\ b]$ で連続で, 区間 $(a,\ b)$ 内の各点で微分可能であるとする. さらに $f(a) = f(b)$ と仮定する. このとき

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b$$

なる数 c が少なくとも一つ存在する.



証明 6.22 (1) より, 区間 $[a, b]$ において $f(x)$ の最小値と最大値が存在する.
(i) 区間 $[a, b]$ 内に $f(x) < f(a)$ なる x が存在するとき. この場合は $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での最小値を与へる c は a, b と異り, 8.2 より, これを c とすればよい.
(ii) 区間 $[a, b]$ 内に $f(x) > f(a)$ なる x が存在するとき. この場合は $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での最大値を与へる c は a, b と異なり, これを c とすればよい. この場合も (i) と同様な考察により $f'(c) = 0$ がわかる.
(iii) $[a, b]$ で常に $f(x) = f(a)$ ならば, 区間 (a, b) 内の任意の値を c とすればよい. □

問 8.4 上の 8.3 の証明において (ii) を完全な形で記述せよ.

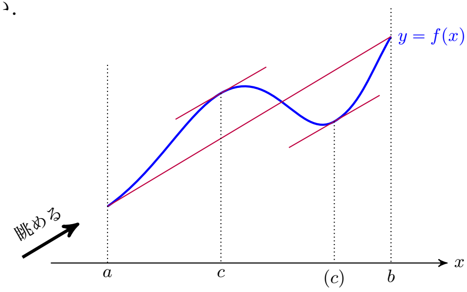
問 8.5 $f(a) = f(b)$ を確かめ, $f'(c) = 0$, $a < c < b$ となる c を求めよ.
(1) $a = 0,\ b = 2\pi,\ f(x) = \cos x$. (2) $a = -1,\ b = 2,\ f(x) = x^3 - 3x$.

定理 8.6　（平均値の定理）函数 $y = f(x)$ は, 区間 $[a,\ b]$ で連続で, 区間 $(a,\ b)$ 内の各点で微分可能であるとする．このとき

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad a < c < b$$

なる数 c が少なくとも一つ存在する．

注意 8.7　直観的には, 図の太い矢印の方向から「眺める」様にすれば, Rolle の定理に帰着する．平均値の定理も, 極めて直観的な内容であるので, 難しくはない．



平均値の定理が必要なのは, 8.15 に述べた微分係数と増減の関係の証明においてであるが, それも直観的には明らかなものである．理工系学部の初年次の段階で平均値の定理を真面目に証明をする大きな理由は, この証明が Taylor の定理と呼ばれる非常に重要な（微分積分学の中でも最高の定理の 1 つ）定理 14.1 の証明に発展するからであると思はれる．実際の証明は直前に述べた Rolle の定理 8.3 に帰着することでなされる．
当面は, 以下の証明を読まないでも, この直観的理解で納得できるならば, それでよいであらう．

証明　（平均値の定理の）　いま

$$A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{8.8}$$

とおく．目標は $A = f'(c)$, $a < c < b$ なる c の存在を示すことである．さて (8.8) は

$$0 = f(b) - \{f(a) + A\,(b-a)\} \tag{8.9}$$

と書き直される．今（これの右辺の a を変数 x に置き換へて）, 新たな函数（これが key point!）

$$F(x) = f(b) - \{f(x) + A\,(b-x)\}$$

を考へる．これは函数 $y = f(x)$ と $y = A\,(x-b) + f(b)$ の差を測つてゐて, 丁度, 上の図の様に左下から「眺めてゐる」ことになる（但し, 符号は逆転してゐる）．この函数 $F(x)$ は

$$F(a) = 0, \qquad F(b) = 0$$

を満たす．実際, 前者は (8.9) からわかるし, 後者は定義から明らかである．さらに, $f(x)$ が微分可能であるから $F(x)$ も微分可能である．実際

$$F'(x) = 0 - \{f'(x) + A\,(-1)\} = A - f'(x) \tag{8.10}$$

となる．以上から $F(x)$ に Rolle の定理を使ふことができて

$$F'(c) = 0, \quad a < c < b$$

となる c が存在する．このとき (8.10) から

$$A - f'(c) = 0, \quad a < c < b.$$

つまり

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad a < c < b$$

なる c が得られた．　□

系 8.11 開区間 I で定義された $f(x)$ があり，$f(x)$ は I 上の至る所で微分可能であるとする．a, b が I の任意の異なる 2 点（大小関係を問はない）であるとき $0<\theta<1$ かつ

$$f(b)=f(a)+f'(a+\theta(b-a))(b-a)$$

なる θ が存在する．

証明 $a<b$ ならば $\theta=\frac{c-a}{b-a}$ とおけば，$c=a+\theta(b-a)$ であり，所望の式は 8.6 から直ちにわかる．$a>b$ ならば 8.6 の区間を $[b,a]$ として

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b},\quad b<c<a$$

なる c がある．この場合も $\theta=\frac{c-a}{b-a}$ とおいて，上式を書き直せば所望の式が得る． □

例題 8.12 全区間 $(-\infty,\infty)$ で連続な函数 $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+1}$ について，

(1) $f(-3)=f(1)=\frac{1}{2}$ である．Rolle の定理より $f'(c)=0$ かつ $-3<c<1$ となる c が存在する．この c を 1 つ求めよ;

(2) また，区間 $[0,2]$ に関して，平均値の定理が存在を主張する c を求めよ．

解答 (1) $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}$ で $f'(c)=0$ となるのは $c^2-4c-1=0$ のとき．つまり $c=2\pm\sqrt{5}$ のときであるが，$-3<c<1$ なので $c=2-\sqrt{5}$ ……· Ans.

(2) 平均変化率は $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=-1$ である．よつて，

$$\frac{c^2-4c-1}{(c^2+1)^2}=-1.\quad\therefore\quad c^4+3c^2-4c=0.$$

これを解いて $c=0,\,1$ が得られる．$0<c<2$ だから $c=1$ ……· Ans. □

演 習 問 題

8.13 以下の函数 $f(x)$ と区間 I, J について，(a), (b), (c) を解答せよ．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) （Rolle の定理） $I=[a,b]$ と書くとき，$f(a)=f(b)=0$ を確かめた上で $f'(c)=0$ なる $c\in I$ を 1 つ求めよ．

(c) （平均値の定理） $J=[a,b]$ と書くとき，$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ なる $c\in J$ を 1 つ求めよ．

(1) $f(x)=(x-1)(x-3),\ \ I=[1,3],\ \ J=[1,4]$.

(2) $f(x)=(x-1)(x-3)^2,\ \ I=[1,3],\ \ J=[1,5]$.

8.14 $f(x)=3x^2+4x-5$ と区間 $[a,b]$ について 8.11 に述べた θ，即ち

$$f(b)=f(a)+f'(a+\theta(b-a))(b-a)$$

なる θ を a, b で表せ．

8.3.　微分係数と増減

導函数の最も重要な点は, それを使つて函数の増減を調べられることである.

定理 8.15 開区間 I で定義され微分可能な函数 $f(x)$ について, 次が成り立つ.
(1) 区間 I の至るところ $f'(x) \geqq 0\,(>0) \iff f(x)$ は I で (狭義) 単調増加.
(2) 区間 I の至るところ $f'(x) \leqq 0\,(>0) \iff f(x)$ は I で (狭義) 単調減少.
(3) 区間 I の至るところ $f'(x) = 0 \iff f(x)$ は I で定数函数.

証明 直観的には明らかに思はれるが, 厳密には, 平均値の定理を使つて示される.
(1) ($\Rightarrow$). $I = [a, b]$ として, $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ なる任意の x_1 と x_2 をとれ. このとき, 区間 $[x_1, x_2]$ に関して平均値の定理 8.6 を使ふと

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad x_1 < c < x_2$$

なる c が存在する. しかし, 仮定より $f'(c) \geqq 0\,(>0)$ であるから

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqq 0\,(>0)$$

であり, それゆゑ $f(x_2) - f(x_1) \geqq 0$ である. よつて

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqq f(x_2)\ (f(x_1) < f(x_2))$$

であることがわかつた. これは $f(x)$ が単調増加（4.2 を参照）であるに他ならない.
($\Leftarrow$) は上の推論を逆に辿ればよい. (2) は (1) と同様である.
(3) ($\Rightarrow$). (1), (2) と同様して, 任意の $x_1, x_2 \in I$ について $f(x_1) = f(x_2)$ であることがわかる. これは $f(x)$ が定数であることに他ならない. ($\Leftarrow$) も同様である. □

例題 8.16 次の函数の graph の概形を描け. 但し $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x+2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ であること（9.6 および 9.1 から示される）を既知とする.

$$f(x) = x\sqrt{x+2} \quad (-2 \leqq x).$$

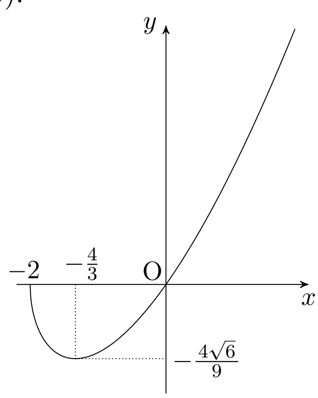
解答 $f(x) = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみであり,

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}.$$

増減表を作ると,

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$

となる. Graph は右の様になる. □



演 習 問 題

8.17 次の函数 $f(x)$ の極値, 最大値, 最小値を求めよ. Graph の概形も描け:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+3} \quad \text{（これは 7.13 の函数).}$$

8.4. Cauchy の平均値の定理

以下の定理は次節で利用される.

定理 8.18 (Cauchy(コーシー) の平均値の定理) 函数 $f(x)$ と $g(x)$ は, 区間 $[a,b]$ で連続で, 区間 (a,b) 内の各点で微分可能であるとする. また $g'(x)$ は区間 (a,b) で 0 にはならないとする. このとき (Rolle の定理の対偶から $g(b) \neq g(a)$ であつて),

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}, \quad a < c < b$$

なる数 c が少なくとも一つ存在する.

証明 証明の ideal は 8.6 にある. まづ

$$A = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

とおき, 函数

$$F(x) = f(b) - \left\{ f(x) + A\bigl(g(b)-g(x)\bigr) \right\}$$

を考へる. このとき

$$F'(x) = f'(x) - A\,g'(x).$$

である. また

$$F(a) = F(b) = 0$$

が容易に確かめられる. 従つて $F(x)$ は Rolle の定理 8.3 の仮定を満たす. よつて

$$F'(c) = 0, \quad a < c < b$$

なる c が存在する. 即ち

$$0 = f'(c) - A\,g'(c), \quad a < c < b.$$

$$\therefore \ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}, \quad a < c < b$$

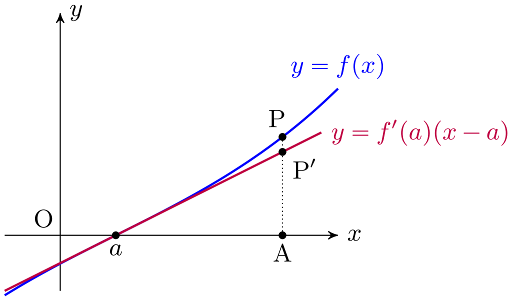
を得る. □

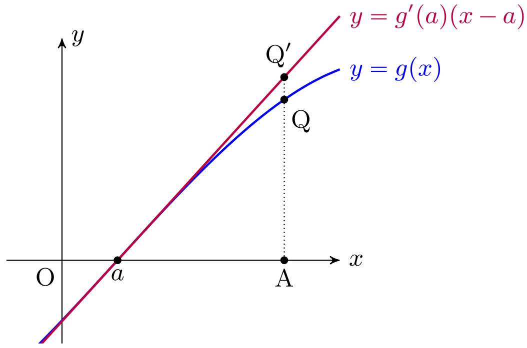
8.5. L’Hôpital の定理

定理 8.19*　(L’Hôpital の定理[19])開区間 I から $a \in I$ を除いた集合の上で定義され，そこで微分可能な函数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し，$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ で，$g'(x)$ は a のある近傍において a を除けば 0 ではないと仮定する．
このとき，$\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，これらは等しい：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注意 8.20　直観的な説明をしておく．以下の 2 つの図が 8.19 に述べた状況を表してゐる．このとき $\mathrm{A}(x,0)$ について，$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ}} \fallingdotseq \dfrac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{AQ'}} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ であることが理解できれば，この定理を理解できたことになるであらう．





証明　証明は Cauchy の平均値の定理の応用である．まづ $f(a) = g(a) = 0$ と定め定義域に a を含める．さうすれば $f(x)$ と $g(x)$ は $a \in I$ においても連続となる．始めに $a < x$ で a に十分近い x を考へる．ここで $f(a) = g(a)$ であることに注意して，区間 $[a, x]$ に関して 8.18 を適用すると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},\quad c \in (a, x)$$

なる c が存在する．ここで $x \to a+0$ とすると $c \to a+0$ となるので，

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

がわかる．同様にして，

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a-0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

もわかるから，6.7 から所望の結論を得る．　□

例題 8.21　簡単な例を一つ，l’Hôpital の定理を用ゐて計算してみる．

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-2x-3)'}{(x^2-x-6)'} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-2}{2x-1} = \frac{4}{5}$$

これは，分母分子を因数分解すれば，次の様にして求められる：

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x+2} = \frac{4}{5}.$$

[19] 英語では l’Hôpital’s rule なので，直訳すると l’Hôpital の規則である．

しかし, 実際に l'Hôpital の定理が有効なのは, より高度な函数の極限計算においてである.

例 8.22 次の例の様に, 1 回 l'Hôpital の定理を用ゐた結果, 右辺が $\frac{0}{0}$ の不定形であるときは, これを繰り返し用ゐることもできる：

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{3x^2-8x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{6x-10}{6x-8}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

注意 8.23 L'Hôpital の定理には次の様な形のものもある.
函数 $f(x),\ g(x)$ は $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$ のとき,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

あるいは $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ のとき,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

等々. 証明については, 例へば [1], pp.56-58 を見られたい.

演 習 問 題

8.24 次の極限を求めよ. 但し, 指数函数の導函数（10.3 を見よ）, 対数函数の導函数（10.1 を見よ）, 三角函数の導函数（11.1 を見よ）, および合成函数の微分法（9.1 を見よ）を既知とする. （Hint : L'Hôpital の定理を利用）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{x}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$.

8.25 次の等式を証明せよ.

(1) 負でない $n\in\mathbb{Z}$ を固定するとき, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$. （Hint : 8.23 の後半を利用. ）

(2) 実数 $\alpha\geqq 0$ を固定するとき, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$.
$\left(\text{Hint}: \alpha<n \text{ なる } n\in\mathbb{N} \text{ がある. このとき } \left|\frac{x^\alpha}{e^x}\right|<\frac{x^n}{e^x} \text{ と (4) を使ふ.}\right)$

§9. 導函数に関する公式

9.1. 合成函数の導函数（連鎖律）

次に述べる合成函数の微分法は, 最も多用される重要な公式である. それは, 非常に多くの有用な函数が基本的な函数から合成函数として得られるからである.

定理 9.1（合成函数の微分法, 連鎖律）函数 $x \mapsto f(x)$ と $u \mapsto g(u)$ がそれぞれの定義域 I と J で微分可能であり, $u = f(x)$ の値域が $y = g(u)$ の定義域に含まれる（つまり $f(I) \subset J$ の）とき, 合成函数 $y = g(f(x))$ の導函数は次式で与へられる：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \Big((g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\, f'(x)\Big).$$ 〔= p.33, 定理 1.17〕

証明 x の増分 Δx に対する u および y の増分は

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x),$$
$$\Delta y = g(u + \Delta u) - g(u)$$

で与へられ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{9.2}$$

である（Δu で割つて Δu を掛けた）. ここで $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ であるから

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} \to \frac{dy}{du}, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{du}{dx}$$

となつて (9.2) の右辺の極限（所望の公式の右辺）が存在するから, (6.11) より (9.2) の左辺の極限も存在し,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$$

となつて, $x \mapsto g\big(f(x)\big)$ は微分可能である. 同時に所望の公式を得る.

しかし, この証明では, Δu が Δx に依らずに常に 0 となる場合が気掛かりである. そこで, 上の証明を次の様に修正する. 所望の等式を, 任意に固定した点 $x = a$ において示すために $b = f(a)$, $\Delta x = h$ と書く.

いま

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{g(u) - g(b)}{u - b} & (u \neq b \text{ のとき}), \\ g'(u) & (u = b \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくと, $\varphi(u)$ は J 上で連続であり,

$$g(u) - g(b) = \varphi(u)(u - b)$$

が成り立つ. 実際 $u \neq b$ なら $\varphi(u)$ の定義から正しく, $u = b$ なら両辺は 0 で等しい. この式で $u = f(a + h)$ とし, さらに両辺を $h \neq 0$ で割れば

$$\frac{g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big)}{h} = \varphi\big(f(a+h)\big) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

がわかる. 最後に $h \to 0$ とすれば

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \varphi\big(f(a+h)\big) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \varphi\big(f(a)\big)\, f'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a) \\ &= g'(b)\, f'(a)\end{aligned}$$

となる. これが証明したい式に他ならない. □

例 9.3 函数 $y = (x^2 + 5x + 1)^7$ は $y = u^7$ と $u = x^2 + 5x + 1$ の合成函数であり,

$$\frac{dy}{du} = 7u^6, \qquad \frac{du}{dx} = 2x + 5$$

であるから, これの導函数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 7u^6 \cdot (2x + 5) = 7(x^2 + 5x + 1)^6\,(2x + 5).$$

最後は x のみの式に!

9.2. 逆函数の導函数

定理 9.4 (逆函数の微分法) 函数 $y = f(x)$ は区間 I で定義されて単調かつ微分可能であり, この区間で $f'(x) \neq 0$ であると仮定する. このとき逆函数 $y \mapsto f^{-1}(y)$ は区間 $f(I)$ (6.25 参照) において微分可能であつて, 次の等式が成り立つ:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} \quad \left(\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}\right).$$

〔= p.36, 定理 1.19〕

証明 x の増分 $\Delta x (\neq 0)$ に対する y の増分を Δy とすると, y の増分 Δy に対する x の増分は Δx に他ならない. このとき, 6.20 から, いづれも 0 ではなく,

(9.5) $$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

ここで 6.20 により $\Delta x \to 0$ と $\Delta y \to 0$ は同値であることと, $\Delta x \to 0$ のとき

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$$

であること, および (6.12) から, (9.5) の左辺も収束し,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \to \frac{dx}{dy}$$

である. 以上から与式も得られた. □

命題 9.6 定数 $a \in \mathbb{Q}$ に対して, 次の式が成り立つ:

$$(x^a)' = a\, x^{a-1} \quad (x > 0).$$

証明 有理数 a は $m \in \mathbb{Z}$ と $n \in \mathbb{N}$ によつて, $a = \frac{m}{n}$ と書ける.

(1) $m = 1$, $a = \frac{1}{n}$ の場合. $y = x^a = x^{\frac{1}{n}}$ とおくと $y^n = x$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} \quad (\because\ 7.11)\\ &= \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = a\, x^{a-1}.\end{aligned}$$

(2) $n = 1$ で $a = m < 0$ の場合は $-m \in \mathbb{N}$ なので, 商の微分公式 (7.9(4)) を用ゐて,

$$(x^m)' = \left(\frac{1}{x^{-m}}\right)' = \frac{0 \cdot x^{-m} - 1 \cdot (-mx^{-m-1})}{x^{-2m}} = mx^{m-1} = ax^{a-1}.$$

(3) 一般の場合は, 函数 $y = x^a = (x^{\frac{1}{n}})^m$ は $y = u^m$ と $u = x^{\frac{1}{n}}$ の合成函数であるから, 合成函数の微分によつて

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = m\, u^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = m\,(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}\\ &= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = a\, x^{a-1}\end{aligned}$$

となるから, やはり与式は正しい. □

演 習 問 題 §9.1 と §9.2

9.7 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $(x^3 + 3x)^5$. (2) $(x^3 + 3x)^{-3}$. (3) $(1 - x)^3$.

(4) $\sqrt{1 - x^3}$. (5) $\sqrt[3]{x - 2x^2}$.

9.3. 媒介変数表示された函数の導函数

定理 9.8 開区間 I で定義された微分可能な 2 つの函数 $x=\varphi(t)$ と $y=\psi(t)$ について [20], $\varphi(t)$ は I で単調かつ $\varphi'(t)\neq 0$ とする. $\varphi(t)$ の値域を U とするとき, U を定義域とする逆函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ が存在し, U を定義域とする x の函数 $y=\psi\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)$ が得られる. この函数は U において微分可能で, 次式が成り立つ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}. \tag{9.9}$$

証明 x の増分 Δx に対し $\Delta t=\varphi^{-1}(x+\Delta x)-\varphi^{-1}(x)$ とおけば $t=\varphi^{-1}(x)$ は $t+\Delta t$ に変化する. このとき $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$ ゆゑ

$$\frac{\psi\bigl(\varphi^{-1}(x+\Delta x)\bigr)-\psi\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)}{\Delta x}=\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}=\frac{\dfrac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}}{\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}}.$$

ここで $\Delta x\to 0$ とすると 6.20 より $\Delta t\to 0$ であるから所望の等式が得られる. □

例題 9.10 次の函数について $x=\varphi(t)$ と $y=\psi(t)$ とおくとき, 得られる函数 $x\mapsto y$ の $(-1\leqq x\leqq 1)$ の導函数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

$$\varphi(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \left(=-1+\frac{2}{1+t^2}\right),\quad \psi(t)=\frac{2t}{1+t^2}.$$

解答 9.8 により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}}{\dfrac{-4t}{(t^2+1)^2}}=\frac{2-2t^2}{-4t}=\frac{t^2-1}{2t}\ \cdots\cdots\ \text{Ans.} \tag{9.11}$$

ちなみに $\varphi(t)^2+\psi(t)^2=1$ であるから y を x の式で書けば

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

但し, 符号を明確にするため $0<t<1$ と仮定した. よつて

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\sqrt{1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}}=-\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}}=-\frac{1-t^2}{2t}$$

となつて (9.11) と一致する. それ以外の t についても同様である. □

問 9.12 次の各問において $\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ.

(1) $x=t^2+t+1,\ \ y=t^2-3t+2.$

(2) $x=\sqrt{t^2+1},\ \ y=\sqrt{t^2-2}.$

[20] 41.1 も参考にするとよい.

§ 10. 指数函数と対数函数の微分

10.1. 自然対数の定義と性質

$x > 0$ に対し, Napier の数 e を底とする x の対数は, $\log x = \log_e x$ と略記され, x の自然対数と呼ばれる. 従つて次が成り立つ:

$$x = e^y \iff y = \log x.$$

命題 10.1 $\log x$ の導函数は次で与えられる:

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

証明 導函数の定義より,

$$\frac{d}{dx}\log x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\underset{(\because\ \log x\ \text{は連続函数})}{=\!=\!=} \log \lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \underset{(\because\ 6.30(3)\,)}{=\!=\!=} \log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

となり, 示された. □

命題 10.2 $\log|x|$ の導函数も次で与へられる:

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

証明 $x < 0$ の場合を調べればよい. $-x = t$ とおくと $t > 0$ であるから

$$(\log|x|)' = \frac{d}{dx}\log(-x) = \left(\frac{d}{dt}\log t\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\cdot(-1) = \frac{1}{-t} = \frac{1}{x}$$

となつて, 証明された. □

10.2. 指数函数の導函数

次に e を底とした指数函数 e^x を考へる.

命題 10.3 次が成り立つ:

$$(e^x)' = e^x.$$

証明 $y = e^x$ とおくと $x = \log y$ で $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$. ここで, 逆函数の微分の公式 9.4 より

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

別証 導函数の定義に沿つて証明してみる: (本質的には, やはり逆函数の微分を調べてゐる.)

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

ここで $h = e^{\Delta x} - 1$ とおくと, $\Delta x = \log(1+h)$ で, $\Delta x \to 0 \iff h \to 0$ であるから,

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{h}{\log(1+h)} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}} \underset{(\because\ \text{補題 } 6.29)}{=\!=\!=\!=} e^x \frac{1}{\log e} = e^x$$

となる. □

10.3. 指数函数の導函数, 一般冪乗函数の導函数, 対数微分法

一般の底の指数函数の導函数を調べる.

命題 10.4 定数 $a>0$ について

$$(a^x)' = a^x \log a.$$

証明 まづ $y=a^x(>0)$ とおいて, 対数を取つて微分すると $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{d}{dx}x\log a = \log a.$

$$\therefore\ y' = y\log a = a^x \log a$$

となる. □

対数の導函数を応用すると次の美しい式が得られる.[21)]

命題 10.5 α が実定数のとき, $x>0$ において

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

証明 $y=x^\alpha(>0)$ とおいて両辺の対数をとつて微分すると $\dfrac{y'}{y} = \alpha\dfrac{d}{dx}\log x = \alpha\cdot\dfrac{1}{x}.$

$$\therefore\ y' = \alpha y\frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

となり, 示された. □

上の 10.4, 10.5 の証明で行つた微分法を <u>対数微分法</u> といふ. もう一つ使用例を挙げる.

例題 10.6 $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x-3)(x+1)}}$ の導函数を求めよ. 但し $\sqrt[3]{A} = A^{\frac{1}{3}}$ の意味である.

解答 この函数の絶対値の対数を取ると

$$\begin{aligned}\log|y| &= \log\left|\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-3)(x+1)}}\right| \\ &= \frac{1}{3}\big(\log|x-2| + \log|x+3| - \log|x| - \log|x-3| - \log|x+1|\big).\end{aligned}$$

この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right). \\ \therefore\quad y' &= \frac{1}{3}y\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-3)(x+1)}}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)\end{aligned}$$

を得る. □

21) なぜか 10.4 と混同する方を見掛ける. ご注意を！

演 習 問 題

10.7 次の函数の導函数を求めよ．但し $a > 0$, $a \neq 1$ とする．

(1) a^{2x+1}. (2) a^{x^2+1}. (3) $x^{\sqrt{2}}$. (4) $x^{\log 3}$.

10.8 次の函数の導函数を求めよ．

(1) $\log|2x+1|$. (2) $\log(\sqrt{x}+x)$. (3) $\{\log(x^2+1)\}^2$. (4) $\log_{e^2}|x|$.

10.9 （対数微分法）次の函数の導函数を求めよ．

(1) x^{x^2+x} $(x > 0)$. (2) $(x^2+1)^x$. (3) $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-4)}}$.

★ 上の 10.9 の (3) は対数微分法でやると手早くできるが, 対数微分法でなくてもできる．一方, (1) と (2) の様に, 底の函数と指数の双方が x に依存する場合は, 本質的に対数微分法が必要である．

10.10 次の極限を求めよ．（Hint : l'Hôpital の定理）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{e^x-1}$. (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$. (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}$.

(4) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{3}{t}\right)^t$. (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2^{-3x}+1}{(2x^2+3x-1)+3^{-x}}$. (6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-2^{3x}}{3^x+2^{2x}-2}$.

§ 11. 三角函数と逆三角函数の導函数

11.1. 三角函数の導函数

命題 11.1 三角函数について, 次が成り立つ:

$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{11.2}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \tag{11.3}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{11.4}$$

証明 (11.2) の証明:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \overset{}{\underset{5.3}{=\!=}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} -\sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \underset{6.27}{=\!=} -\sin x \cdot 1 = -\sin x.\end{aligned}$$

(11.3) の証明は問 11.5 とする.

(11.4) の証明:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

と商の微分の公式 7.9(2) から容易に得られる（下の 11.6）. □

問 11.5 公式 (11.3) の証明を実行せよ.

問 11.6 公式 (11.4) の証明を実行せよ.

演 習 問 題

11.7 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $\sin(3x-1)$.
(2) $x\cos x$.
(3) $\sin(x^2)$.
(4) $\sin^2 x \cos x$.
(5) $\sin(\sin x)$.
(6) $\dfrac{1}{\cos x}$.

11.8 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $\cos(2x+1)$.
(2) $\sin^2(x+1)$ （注意：$\sin^2 u = (\sin u)^2$）.
(3) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$.
(4) $\sqrt{1+\cos x}$.

11.9 次の極限を求めよ. (Hint：L'Hôpital の定理)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x}$. (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin x}$. (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

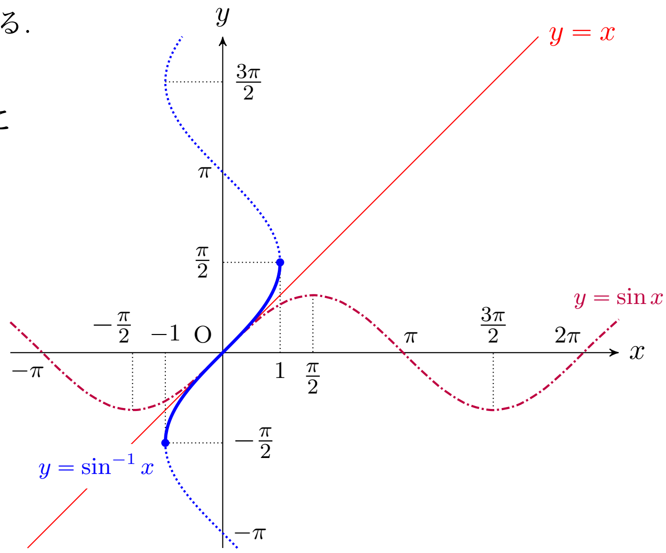
（Hint：L'Hôpital の定理を繰り返す.）

11.10 次の媒介変数表示された函数 $x \mapsto y$ の導函数 $\dfrac{dy}{dx}$ を (9.9) を利用して求めよ. 結果は t の式で記せ.

(1) $x = e^t\cos t,\ \ y = e^t\sin t$. (2) $x = (t-2)\cos t,\ \ y = (t^2+1)\sin t$.

11.2. 逆三角函数の導函数

逆三角函数の導函数について述べる.



$y = \sin^{-1} x$ の導函数.

$x = \sin y$ であるから, $\frac{dx}{dy} = \cos y$. これと逆函数の微分法 9.4 より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}.$$

これを x で表したいので,

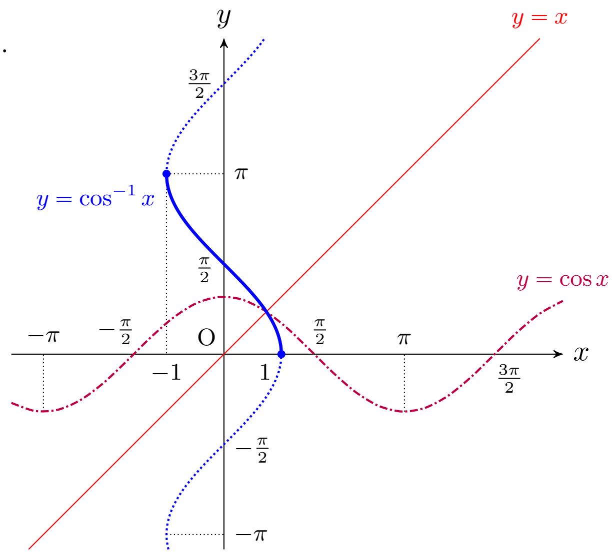
$$\begin{aligned} \cos y &= \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} \\ &= \pm\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

を使つて,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}.$$

しかし, 符号 $\pm$ は $+$ が正しい.

実際 $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geqq 0$ だから. また graph からも分かる通り, 単調増加函数だから確かに $+$.



$y = \cos^{-1} x$ の導函数.

$x = \cos y$ であるから, $\frac{dx}{dy} = -\sin y$. これと逆函数の微分 9.4 より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y}.$$

これを x で表したいので,

$$\begin{aligned} \sin y &= \pm\sqrt{1 - \cos^2 y} \\ &= \pm\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

を使つて,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mp\sqrt{1 - x^2}}.$$

ここで, 符号 $\mp$ は $-$ が正しい.

実際 $0 \leqq y \leqq \pi$ より $\sin y \geqq 0$ だから $-\sin y \leqq 0$ なので. また graph を見て分かる様に, 単調減少函数だから確かに $-$ である.

注意 11.11 以上から

$$(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)' = 0$$

がわかるが, これは 5.8 の等式と辻褄が合ふ.

$y = \tan^{-1} x$ の導函数.

$x = \tan y$ であるから, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$.　これと逆函数の微分 9.4 より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y.$$

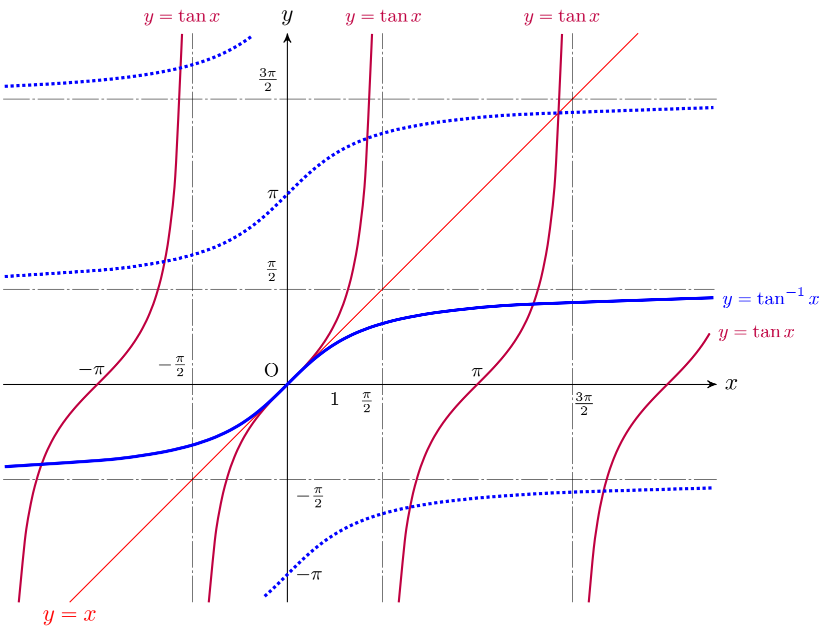
これを x で表したいので,

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

を使って,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

☆ $\tan^{-1}$ については, $\sin^{-1} x$ や $\cos^{-1} x$ の様な符号 $\pm$ を選ばなければならない場面はなくて, スッキリしてゐる.



☆ 逆函数を構成してみると 三つの三角函数の中では $\tan x$（と $\tan^{-1} x$）が最も美しい！

以上で得られた公式をまとめておく.

命題 11.12　逆三角函数の導函数は以下の通り：

(11.13) $$\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

(11.14) $$\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

(11.15) $$\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

演 習 問 題

11.16 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$.

(2) $\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x-1}$.

(3) $\sin^{-1}\sqrt{x}$.

(4) $\tan^{-1}(e^x-e^{-x})$.

11.17 次の極限を求めよ. (Hint : L'Hôpital の定理も試してみよ.)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}(2x)}{\sin^{-1}x}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\tan^{-1}x)^2}{x\sin^{-1}x}$.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{2}-x-\cos^{-1}x}{x^3}$.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1-x)+\sin^{-1}x}{x^2}$.

(9) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{xe^{x^2}-\sin^{-1}x}{x^3}$.

11.18 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $y=\sqrt{x^2+1}\sin^{-1}(3x)$.

(2) $y=e^x\cos^{-1}x$.

(3) $y=\tan^{-1}e^x$.

(4) $y=e^{x\sin^{-1}x}$.

(5) $y=x^{\sin x}$.

11.19 次の函数 $f(x)$ の極値, 最大値, 最小値を求めよ. Graph の概形も描け.

$$f(x)=\tan^{-1}x+\frac{x+1}{x^2+1}.$$

§ 12.　双曲線函数

定義 12.1　指数函数を使つて

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．それぞれ

　双曲線余弦函数（hypabolic cosine, コッシュ）,
　双曲線正弦函数（hypabolic sine, シンチ）,
　双曲線正接函数（hypabolic tangent, タンチ）

と呼ばれる．これらをまとめて 双曲線函数 と称する．この名前の由来はあとで述べる．

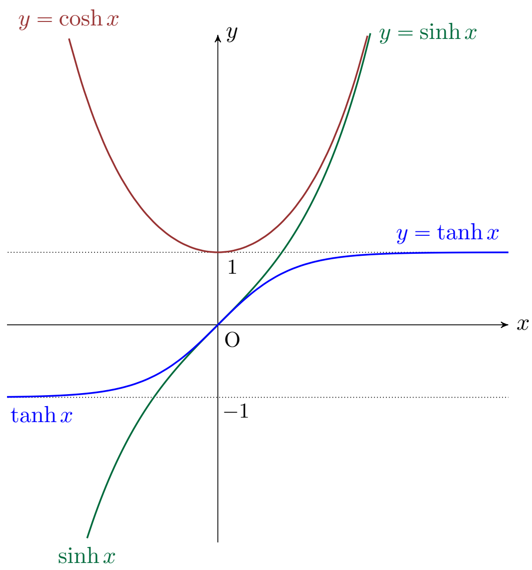
これらの graphs を右図に示す．$\cosh x$ は偶函数で $x = 0$ のみで極小値 1 をとり，

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$$

である．$\sinh x$ と $\tanh x$ は共に奇函数であるので，graphs は原点 O に関して対称である．また

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1$$

であるので，その graphs は $x = \pm 1$ を漸近線に持つ．



これらの函数の逆函数（$\cosh x$ については $x \geqq 0$ での）は, $\cosh^{-1} x$, $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ と記されて, 具体的には以下の様に書ける（右に定義域を記した）：

$$
\begin{aligned}
\cosh^{-1} x &= \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad [1,\infty). \\
\sinh^{-1} x &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad (-\infty,\infty). \\
\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \qquad (-1,1).
\end{aligned}
\tag{12.2}
$$

さらに以下の等式が成り立つ：

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tag{12.3}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \tag{12.4}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x, \tag{12.5}$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \tag{12.6}$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \tag{12.7}$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y. \tag{12.8}$$

x が動くとき, 点 $(\cos x, \sin x)$ が単位円周上を動くのと同様に, x が動くとき, 点 $(\cosh x, \sinh x)$ が双曲線上を動くことが (12.3) からわかる. これが双曲線函数と称される理由の 1 つである.

これらの函数は他にも多くの重要な性質を持つ. 例へば変数については面積角と呼ばれる解釈がある. しかし, ここではこれ以上は述べない. 読者は調べてみるとよい.

演 習 問 題

12.9 (12.2) の 3 式をすべて導け.

12.10 (12.3), (12.4), (12.5), (12.6), (12.7), (12.8) をすべて示せ.

§ 13.　高次の導函数

13.1.　高次の導函数, C^r 級函数

定義 13.1　函数 $y = f(x)$ について, 次の様に導函数の導函数等を定義する:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = f''(x) = y'', \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = f'''(x) = y''', \cdots$$

$$\cdots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \cdots \quad (n \geqq 2).$$

もちろん, これらの導函数が存在することを前提としてゐる.　上記の $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ を <u>n 次導函数</u>と呼ぶ. 2 次以上の導函数をまとめて, <u>高次の導函数</u>と呼ぶ.
n 次導函数を表すのに $\dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ などの記法も使はれる.
定義域内の内点 a における高次の微分係数 (<u>n 次微分係数</u>) もこれにならつた記法 ($f^{(r)}(a)$ など) で書かれる. と呼ぶ.

例 13.2　(1) $(e^x)' = e^x$ ゆゑ, 任意の非負整数 n について, $(e^n)^{(n)} = e^x$.
(2) $(x^m)^{(m)} = m!$.　$n > m$ のとき $(x^m)^{(n)} = 0$.

次の公式は便利である.

命題 13.3　整数 $n \geqq 0$ について, 次が成り立つ:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

証明　n に関する数学的帰納法で証明できる. 試みて欲しい.　□

次の定義を導入しておくと, 以降の多くの定理を述べるのに都合がよい.

定義 13.4　開区間 I で定義された函数 $f(z)$ について, 点 $a \in I$ で第 r 次までの微分係数が存在するとき, $f(x)$ は a で r <u>回微分可能</u>であるといふ. また I 上の至るところで第 r 次までの導函数を持つとき, $f(x)$ は I で r <u>回微分可能</u>であるといふ. また, r 回微分可能な函数の第 r 次導函数が連続であるとき, $f(x)$ は I 上で <u>C^r 級</u>であるといはれる. $f(x)$ が I で C^0 級であることとは I で連続な函数であることを意味するものとする. また, 任意の整数 $r \geqq 0$ について C^r 級である様な函数は <u>C^∞ 級</u>といはれる.

例 13.5　$x < 0$ において $f(x) = -x^2$, $x \geqq 0$ において $f(x) = x^2$ で定義される函数は導函数を持ち $f'(x) = 2|x|$ であり, これは連続である. しかし $f''(0)$ が存在しない. ゆゑに $f(x)$ は C^1 級函数であるが, C^2 級函数ではない.

注意 13.6 函数 $f(x)$ が x において 2 回微分可能で, 函数 $u \mapsto y = g(u)$ が $u = f(x)$ において 2 回微分可能であるならば, 合成函数 $x \mapsto g(f(x))$ も 2 回微分可能であつて,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\right) &= \left(\frac{d}{dx}\frac{dy}{du}\right)\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} \\ &= \frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}\end{aligned}$$

となる. 3 次以上の微分係数についても同様な計算ができる.

注意 13.7 函数 $y = f(x)$ の逆函数 $x \mapsto f^{-1}(y)$ が存在するとして, $f(x)$ は x において 2 回微分可能で $f'(x) \neq 0$ と仮定する. このとき, この逆函数は $y(= f(x))$ において 2 回微分可能で

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = -\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}$$

となる.

演 習 問 題

13.8 (1 次) 導函数と 2 次導函数を求めよ.

(1) $(x^2 + 2x + 1)^3$.

(2) $(2x + 5)^6$. 〔≒ 1.7 A1 (2)〕

(3) $\dfrac{1}{x^2 + x + 2}$. 〔≒ 1.7 A1 (4)〕

(4) $\dfrac{1}{(x^2 + x + 2)^3}$. 〔≒ 1.7 A1 (5)〕

(5) $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^4$. 〔≒ 1.7 A1 (6)〕

(6) $\sqrt{x^2 + 2x + 5}$. 〔≒ 1.7 A1 (7)〕

(7) $\sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - x}$. 〔≒ 1.7 A1 (8)〕

(8) $\dfrac{x^2}{2x + 5}$.

(9) $x^4 + 2x^2 - x + 3$. 〔≒ 1.7 A2 (1)〕

(10) $(x^3 + 1)^3$. 〔≒ 1.7 A2 (2)〕

(11) $\sqrt{x + 2}$. 〔≒ 1.7 A2 (3)〕

(12) $\sqrt[3]{x^3 + 4}$ 〔≒ 1.7 A2 (4)〕

(13) $\dfrac{1}{x^2 + 2}$. 〔≒ 1.7 A2 (5)〕

(14) $\dfrac{x}{x^2 + 2}$. 〔≒ 1.7 A2 (6)〕

13.9 n 次導函数を求めよ. 但し $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(1) $\dfrac{1}{1 + x}$. 〔= 1.7 A3 (1)〕

(2) $\dfrac{1}{1 - x}$. 〔= 1.7 A3 (2)〕

(3) $\sin(2x + 1)$.

13.2. 2 次導関数と極値, graph の凹凸

曲線のより詳しい形状について述べる.

定義 13.10 区間 I で定義された函数 $f(x)$ が, 任意の $x_1, x_2 \in I$ と任意の $0 < t < 1$ について

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) < f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

を満たすとき, 函数 $f(x)$, 或いはその graph は区間 I で上に凸であるといはれる [22]. 不等号の向きを逆にした性質を持つとき, 同じく下に凸といはれる.

C^2 級の函数については第 2 次導函数の正負によつて凹凸がわかる.

定理 13.11 函数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で定義された連続函数で, 区間 (a,b) で C^2 級であるとする. 区間 (a,b) で $f''(x) < 0$ であれば, $f(x)$ は $[a,b]$ で上に凸である. 同様に, 不等号の向きを逆にした性質を持てば下に凸である.

証明 $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ なる任意の x_1, x_2 に対し, 区間 $[x_1, tx_1 + (1-t)x_2]$ に関する平均値の定理から

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{tx_1 + (1-t)x_2 - x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < tx_1 + (1-t)x_2$$

なる c_1 が存在し, 区間 $[tx_1 + (1-t)x_2, x_2]$ に対して, 平均値の定理から

$$\frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{x_2 - tx_1 - (1-t)x_2} = f'(c_2), \quad tx_1 + (1-t)x_2 < c_2 < x_2$$

なる c_2 が存在する. このとき $c_1 < c_2$ で

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{t(x_2 - x_1)} = f'(c_2)$$

であるが, 仮定 $f''(x) < 0$ と 8.15(2) より $f'(x)$ は単調減少ゆゑ $f'(c_1) > f'(c_2)$ である. よつて

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} < \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{t(x_2 - x_1)}.$$

$$\therefore\ t\big(f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)\big) < (1-t)\big(f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)\big).$$

$$\therefore\ f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

となり, 証明が終はる. □

[22] これは, $f(x)$ の graph の任意の 2 点を結ぶ線分が, その 2 点の間においては graph より下にあることに他ならない.

命題 13.12 開区間 I で定義された函数 $f(x)$ が 2 次までの導函数を持つとせよ．また $a \in I$ について $f'(a)=0$ とし，$f''(x)$ は $x=a$ において連続とする．このとき
(1) $f''(a)>0$ であれば $f(x)$ は a で極小，
(2) $f''(a)<0$ であれば $f(x)$ は a で極大である．

証明 まず (1) を示す．$f''(x)$ が $x=a$ で連続であるから，8.15(1) より a の近傍で $f'(x)$ は増加する．仮定 $f'(a)=0$ より，$x=a$ において $f'(x)$ の符号は負から正に変はる．ゆゑに，$f(x)$ は $x=a$ において減少から増加へと変はる．つまり $f(a)$ は極小値である．
(2) も同様に示される． □

定義 13.13 C^2 級の函数 $f(x)$ に対し，$f'(x)$ が $x=a$ で極小または極大となるとする．このとき，点 $(a, f(a))$ をこの函数の（またはその graph）の<u>変曲点</u>と呼ぶ．$f(x)$ が $x=a$ で変曲点を持つとき $f''(a)=0$ である．この逆は成立しない．

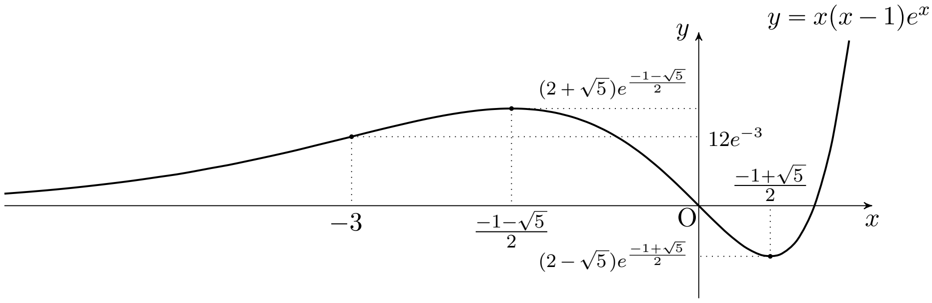
例題 13.14 函数 $f(x)=e^x x(x-1)$ の凹凸を含めた概形を描け．また変曲点を記せ．

解答 1 次と 2 次の導函数を求めると，

$$f'(x)=e^x(x^2+x-1), \qquad f''(x)=e^x x(x+3).$$

これより増減表を書けば以下の様になる．ここで増減と凹凸を ↗ の様な矢印で記入しておくと見易い．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	$12e^{-3}$	↗	$(2+\sqrt{5})\,e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$	↘	0	↘	$(2-\sqrt{5})\,e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$	↗



よつて変曲点は $(-3, 12e^{-3})$，$(0,0)$ の 2 点である． □

演 習 問 題

13.15 次の函数の凹凸を含めた graph の概形を描け．また変曲点を記せ．
(1) $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2$. (2) $(x-1)\,e^x$.

Graph の凹凸を利用した簡単な algorithm で, 方程式の近似解を求める <u>Newton の近似法</u> と呼ばれる次の方法がある.

定理 13.16 $f(x)$ は $[a,b]$ を含む開区間 I で定義された C^2 級函数であるとする. さらに, 次の (1), (2) の双方が成り立つてゐるものとする :

(1) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$;

(2) $[a,b]$ において $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$.

このとき $f(\alpha) = 0$ となる α が $[a,b]$ 内に唯一つ存在する.
さて, 次の様に帰納的に数列 $\{c_n\}$ を定める :

$$c_1 = b, \quad c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

このとき $\{c_n\}$ は単調減少であり, α に収束する.

証明 仮定 (1) と中間値の定理 6.21 より α は存在する. 仮定 (2) の $f'(x) > 0$ より $f(x)$ は単調増加であるから, α は一意的である. 次に, 仮定 (2) より

$$\alpha < c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)} < c_1,$$
$$\alpha < c_3 = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)} < c_2,$$
$$\cdots\cdots$$

である. よつて

$$c_1 > c_2 > c_3 > \cdots > \alpha$$

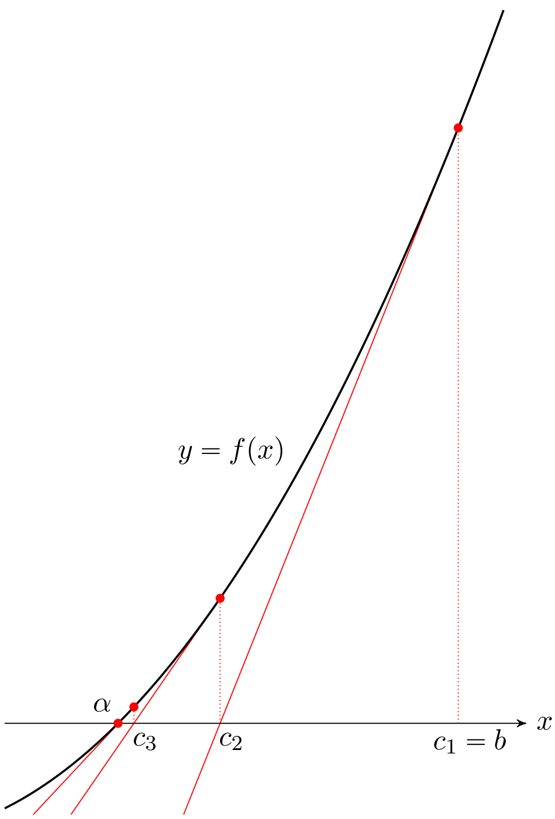
であることがわかる. よつて, 単調収束定理 3.4 が適用できて $\{c_n\}$ は収束する. その極限値を γ とおき,

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$$

において $n \to \infty$ とすれば

$$\gamma = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

であるから $f(\gamma) = 0$. しかるに α の存在の一意性から $\gamma = \alpha$ でなければならない. □



注意 13.17 もちろん $f'(x)$, $f''(x)$ の正負が上記 13.16 におけるものと異る場合も, 同様な定式化ができる. それらを含めて Newton の近似法と呼ばれる.

13.3. Leibniz の公式

定理 13.18 (Leibniz(ライプニッツ) の公式) n 回微分可能な函数 u と v について

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)}$$

が成り立つ. ここで $\binom{n}{r} = {}_n\mathrm{C}_r$ である.

証明 導函数の基本的性質 7.9 を使つて, 公式 $(uv)' = u'v + uv'$ の両辺を微分すると

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

が得られる. さらに

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$
$$(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

等が得られ, 所望の公式が成り立つことが推測できる. 証明は帰納法で行ふ. その際 $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$ (Pascal(パスカル) の三角形) を利用する. □

例題 13.19 n を 0 または自然数とする. 函数 $y = x^2 \sin x$ の n 次導函数を求めよ.

解答 $u = x^2$, $v = \sin x$ として Leibniz の公式を使ふ. いま, $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = 0$ であり, $k \geqq 4$ についても $u^{(k)} = 0$ である. ゆえに,

$$\begin{aligned}
(x^2 \sin x)^{(n)} &= \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{n-3} u''' v^{(n-3)} + \binom{n}{n-2} u'' v^{(n-2)} + \binom{n}{n-1} u' v^{(n-1)} + \binom{n}{n} u v^{(n)} \\
&= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{\text{はじめの } (n-2) \text{ 項}} + \frac{n(n-1)}{2} (x^2)'' (\sin x)^{(n-2)} + n (x^2)' (\sin x)^{(n-1)} + x^2 (\sin x)^{(n)} \\
&= n(n-1) \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}(n-2)\right) + 2nx \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}(n-1)\right) \\
&\qquad + x^2 \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) \quad (\because\ (13.3)) \\
&= -n(n-1) \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) - 2nx \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) + x^2 \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) \\
&= (x^2 - n^2 + n) \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) - 2nx \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) \quad \cdots\cdots \ \text{(Ans.)}
\end{aligned}$$

となる. □

演 習 問 題

13.20 次の函数の 4 次導函数を Leibniz の公式を利用して求めよ.
(1) $e^x \sin x$. (2) $x^3 e^{2x}$.

13.21 次の函数の n 次導函数を Leibniz の公式を利用して求めよ.
(1) $x^2 e^x$. (2) $x^3 \cos x$. (3) $x^3 e^{2x}$. (4) $x^3 \log x$.

§ 14.　Taylor の定理

定理 14.1　(Taylor の定理)　函数 $f(x)$, が区間 $[a, b]$ を含む開区間で, n 回までは微分可能ならば,

$$
\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 \\
&\quad + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n
\end{aligned}
\tag{14.2}
$$

かつ $a < c < b$ なる c が存在する. $n = 1$ の場合が平均値の定理 8.6 である.

証明　$n = 3$ のときを証明する. つまり

$$
f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3, \quad a < c < b
$$

をともに満たす c が存在することを証明する.　まず, そもそも

$$
f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + A \cdot (b-a)^3
\tag{14.3}
$$

を満たす定数 A は存在する (A について解いてみればよい). ゆゑにこの証明の肝は A を

$$
A = \frac{f'''(c)}{3!}, \quad a < c < b
$$

と表すことができるかどうか, といふことに他ならない. ここで, 次の函数を考察する:

$$
F(x) = f(b) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + A \cdot (b-x)^3 \right\}
$$

(ここが Key point!)

$=$ "(14.3) の左辺" $-$ "(14.3) の右辺の a を x に置き換へたもの".

あとは $F(x)$ について Rolle の定理 8.3 を適用するだけである. 実際

$F(a) = 0$　($\because$ 代入してみると, 定数 A の定義からわかる)

$F(b) = 0$　($\because$ 代入してみるとすぐわかる)

なので, $F(a) = F(b)$ であり, $F'(c) = 0$ かつ $a < c < b$ となる c が存在する. ここで

$$
\begin{aligned}
F'(x) = -\Bigg\{ & \cancel{f'(x)} + \left(\cancel{\frac{f''(x)}{1!}(b-x)} + \cancel{\frac{f'(x)}{1!}(-1)} \right) \\
& + \left(\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cancel{\frac{f''(x)}{2!}2(b-x)(-1)} \right) \\
& + A \cdot 3(b-x)^2(-1) \Bigg\} \;=\; -\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 + A \cdot 3(b-x)^2
\end{aligned}
$$

であるから, その c について

$$
F'(c) = -\frac{f'''(c)}{2!}(b-c)^2 + A \cdot 3(b-c)^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad a < c < b.
$$

しかるに $b - c \neq 0$ であるから

$$
A = \frac{f'''(c)}{3!} \quad \text{かつ} \quad a < c < b
$$

となり, 目標に達した. 一般の n についても証明は全く同様にできる.　□

問 14.4 14.1 の証明を理解した上で, それを見ないで $n = 4$ の場合に記述せよ.

注意 14.5 (1) Taylor の定理において a と b の大小関係を逆にして, 不等式 $a < c < b$ を $b < c < a$ に置き換へても, 全く同じ主張が成り立つ. 理由は, この場合に証明を再構成してみればわかる.
(2) 上の状況で $\theta = \frac{c-a}{b-a}$ とおくと, 8.11 と同様に $a < b$, $a > b$ のいづれの場合でも

$$0 < \theta < 1, \quad c = a + \theta(b - a)$$

である. このことから Taylor の定理を次の形に述べておくと便利なことが多い.

定理 14.6 函数 $f(x)$, は開区間 I で定義されてゐて, I において n 回までは微分可能であるとする. $a, b \in I$ のとき,

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 \\ &+ \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \\ &+ \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n \end{aligned} \tag{14.7}$$

かつ $0 < \theta < 1$ なる θ が存在する.

例 14.8 重要な函数についての Taylor の定理の適用例.

(1) $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n.$$

(2) $$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!}x^{2m-2} + \frac{(-1)^m \cos\theta x}{(2m)!}x^{2m}.$$

(3) $$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \frac{(-1)^m \sin\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

(4) $$\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-\theta x}\right)^n, \quad \text{但し } x < 1.$$

但し 4 式個別に, それぞれの x, n, m ごとに, $0 < \theta < 1$ なる θ が存在して等式が成立する. これらは, 次のことからわかる : $k = 0, 1, 2, \cdots$ について,

$$\frac{d^k}{dx^k}e^x = e^x, \quad \frac{d^k}{dx^k}\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}k\right), \quad \frac{d^k}{dx^k}\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}k\right),$$
$$\frac{d^k}{dx^k}\log(1-x) = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k} \quad (\text{但し } k \geqq 1).$$

定義 14.9 (14.2), (14.7) の最後の項を Lagrange の剰余項と称する. これを

$$R_n(b) = R_n(b; a, f) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n$$

などと書いて $f(x)$ の a おける展開の第 n 次剰余項などとも称する. また, a をそれらの等式 (Taylor の定理) の中心と呼び, b を変数と呼ぶ.

例 14.10　Napier の数 e の精密計算法　(Taylor の定理の応用)

Taylor の定理の応用は「微分積分学といふ学問がいかに重要か」を感じるとても良い例だと思ふので，ここに精密な数値計算への応用例を記しておく.

ここでは，

$$a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = e^x, \; n = 10$$

として Taylor の定理を書き下してみたい.

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \cdots$$

であるから $x = a = 0$ を代入すれば

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 1.$$

$f(b) = f(1) = e^1 = e$ であるから，結局

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{e^c}{10!} \\ &= 2 + \frac{3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9 + \cdots + 6{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9 + 7{\cdot}8{\cdot}9 + 8{\cdot}9 + 9 + 1}{9!} + \frac{e^c}{10!} \\ &= 2 + \frac{26065}{36288} + \frac{e^c}{10!}, \quad (0 < c < 1) \end{aligned}$$

となる c が存在する. ここで，

$$2 + \frac{26065}{36288} = 2.7182815\cdots$$

である. 3.6 により $(1<)\, e^c < e < 3$ だから，誤差は

$$0 < \frac{e^c}{10!} < \frac{3}{10!} = \frac{1}{1209600} < \frac{1}{10^6}$$

なので

$$\underline{2.718281 < e < 2.718283}$$

であることがわかった. これほどの精密な計算方法は e の定義式

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

からは，想像もできないことである. ちなみに

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{743324}\right)^{743324} &= 2.71827999999765\cdots, \\ \left(1 + \frac{1}{743325}\right)^{743325} &= 2.71828000000010\cdots \end{aligned}$$

である.

ここで, Taylor の定理の剰余項を別の形に表すことを考へる. 剰余項について, それの精密な値を求めることに腐心せねばならない状況はほとんどなく, むしろ, その大きさが評価されるべきものであるので, 様々な状況に応じて評価し易い形が選ばれる. それゆゑ, できるだけ多種類の表示を用意しておくのがよい. 次の表示はその一例である. 後に 32.1 でも別の形（積分型）について述べる.

定理 14.11 函数 $f(x)$, は開区間 I で定義されてゐて, I において n 回までは微分可能であるとする. $a, b \in I$ のとき（以上は 14.6 と同じ仮定), Taylor の定理の第 n 剰余項（14.9 を見よ）は, ある θ_1 （$0 < \theta_1 < 1$）により

$$R_n^*(b) = R_n^*(b; a, f) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(b - a))}{(n-1)!}(1 - \theta_1)^{n-1}(x - a)^n$$

とも書かれる. この形を <u>Cauchy の剰余項</u> と称する.

証明

$$G(x) = f(b) - \Big(f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b - x) + \frac{f''(x)}{2!}(b - x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(b - x)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1}\Big)$$

で函数 $G(x)$ を定義する. $f(x)$ が a, b を含む開区間で n 回微分可能なので, $G(x)$ はその区間で微分可能である. よつて, 14.1 の証明中に計算と同様に

$$G'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1}$$

を得る. また明らかに

$$G(a) = R_n(b), \quad G(b) = 0$$

である. ここで, 函数 $G(x)$ に対して a と b を端点とする区間における平均値の定理 8.6 を適用すると

$$\frac{G(b) - G(a)}{b - a} = G'(c), \text{ 即ち } \frac{0 - R_n^*(b)}{b - a} = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b - c)^{n-1}$$

となる c が a と b の間に存在する. 14.5(2) にある様に $\theta_1 = \frac{c-a}{b-a}$ とおけば $0 < \theta_1 < 1$ であつて, $c = a + \theta_1(b - a)$ と書けるので,

$$\begin{aligned} R_n^*(b) &= \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(b - a))}{(n-1)!}\big(b - a - \theta_1(b - a)\big)^{n-1}(b - a) \\ &= \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(b - a))}{(n-1)!}(1 - \theta_1)^{n-1}(b - a)^n \end{aligned}$$

を得て, 証明が終はる. □

例 14.12 上の 14.11 から, 14.8(4) の別形として, 次の等式が得られる. 即ち, 任意の $x < 1$ に対して, 次の式を満たす $0 < \theta < 1$ なる θ が存在する:

$$\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^n} \tag{14.13}$$

§ 15.　極座標表示について

ここまで全く触れてこなかつたが, ここで極座標表示について説明しておく. いま, 通常の座標平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ について, 有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が x 軸の正の方向となす角を θ とし, $r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく. このとき, P の極座標を (r, θ) と表すが, これを直交座標と誤解しない様に常に配慮しなければならない. また, この状況では, もちろん

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

である. ここで P が座標平面を動くとする. 但し, r は θ の函数

$$r = \varphi(\theta) \tag{15.1}$$

として与へられて, r はこの函数によつて θ に応じて変化するものとする. このとき P の動きを辿ればある曲線 C が得られる. 即ち, (15.1) は C を r と θ の方程式 (関係式) で表したものと考へられる. この様なとき, (15.1) を曲線 C の極座標表示と呼ぶ.

例題 15.2　次の極座標表示で表される曲線を通常の x, y 座標の関係式に直せ.

(1) $r = 1$.

(2) $r = \cos\theta$.

解答　(1) 通常座標との関係は

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

となるので求める関係式は $x^2 + y^2 = 1$ である.

(2) 通常座標との関係は

$$x = \cos^2\theta, \quad y = \cos\theta\sin\theta.$$
$$\therefore\ x = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad y = \frac{\sin 2\theta}{2}.$$
$$\therefore\ (2x - 1)^2 + 4y^2 = 1.$$

これを整理して

$$x^2 - x + y^2 = 0$$

を得る. □

第3章　級数

級数の理論はかなり手間が掛かるので, 要点のみを対面の授業で行ひ, 詳細は online で講義を配信することとする.

§16.　級数

級数の収束と発散の定義を理解する. 級数を使って指数函数が定義できることを学ぶ.

定義 16.1　(無限の) 数列 $\{a_n\}$ に対し, 数列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} \ :\ a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots$$

を a_n を一般項とする <u>(無限) 級数</u> と称する. この数列の極限を

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots \tag{16.2}$$

などと記す. この極限も a_n を一般項とする <u>(無限) 級数</u> と呼ばれる.
数列 (16.2) が収束 (発散) するとき, 上の無限級数は <u>収束 (発散)</u> するといふ.

最も重要な無限級数の一つ, 等比級数を思ひ出さう.

定義 16.3　等比数列から定まる無限級数は <u>等比級数</u> と呼ばれる. 初項 a, 公比 r の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ に対する無限級数

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} \tag{16.4}$$

についても, a, r をそれぞれ, この級数の <u>初項</u>, <u>公比</u> と呼ぶ.

命題 16.5　(等比級数の収束発散) 級数 (16.4) は,
(1) $a=0$ ならば r に依らず 0 に収束し,
(2) $a\neq 0$ ならば $|r|<1$ のときだけ収束する. そのとき, 極限値は $\dfrac{a}{1-r}$ である.

証明　等比数列の和を与へる公式 (2.8) と数列 $\{r^n\}$ の極限 2.24 を合はせれば, 主張は直ちに示される. □

例題 16.6 次の無限級数が ∞ に発散することを示せ. 〔≒ 1.3 A2 (3)〕

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

解答 ここでは, 素朴な方法による証明を与へる. 後に, 積分を利用した証明を 31.2 で述べる.
与へられた級数を次の様に分けて計算する:

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)+\cdots\\
&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)+\cdots\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\ =\infty
\end{aligned}$$

となる. よつて主張が示された. □

問 16.7 次の級数の収束を以下の指示に従つて示せ: 〔≒ 1.3 A2 (2)〕

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots.$$

$n=2,3,\cdots$ について $n^2>(n-1)n$ と $\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$ を利用して. (後に 31.3 にて別の方法を提示する.)

演 習 問 題

16.8 上記 16.7 を参考にして, 次の不等式を示せ:

(1) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots<2.$ 〔= 2.6 A3(1)〕

(2) $1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^3}+\cdots<\dfrac{4}{3}.$ 〔= 2.6 A3(2)〕
(後の 31.4 も参照されたい.)

§ 17. 級数の収束と発散

級数についての基本的な事柄をまとめておく.

定義 17.1 数列 $\{a_n\}$ について
Cauchy 条件 : 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$m > n > N \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

が成り立つとき 数列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列 をなすといはれる.

補題 17.2★ (Cauchy の判定法 1) 与へられた数列が収束するためには, それが Cauchy 列をなすことが必要十分である.

証明 必要性は易しい. 十分性については 実数の連続性 の本質とも言へる 上極限, 下極限 の概念にまで遡る必要がある. 詳細は [6] I, pp.39-41, 定理 14 を見られたい. □

17.2 を級数の場合に述べておく. 詳細は [6] I, p.93, 定理 1 を見られたい.

補題 17.3★ (Cauchy の判定法 2) 数列 $\{a_n\}$ が与へられたとせよ. 級数 $\sum a_n$ が収束するためには, その部分和のなす数列が Cauchy 列をなすこと, 即ち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$m > n > N \implies |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

となることが必要十分である.

命題 17.4 級数 $\sum a_n$ と $\sum b_n$ が収束すれば, 級数 $\sum (a_n + b_n)$ も収束する. また, 定数 c について, $\sum a_n$ が収束すれば, $\sum c\, a_n$ も収束する.

証明 数列 $\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$, $\left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k \right\}$ に 2.18 を適用すれば, 直ちにわかる. □

定義 17.5 すべての項が正の実数である数列を 正項数列 といひ, 正項数列の和として定義される級数を 正項級数 といふ.

定義 17.6 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ について $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ をこの級数の 第 n 部分和 といひ, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ をその 剰余 (remainder) といふ.

命題 17.7 部分和のなす数列が有界な正項級数は収束する.

証明 題意を満たす数列 $\{a_n\}$ に対して, 3.4 を部分和からなる数列 $\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_n \right\}$ に適用すれば結論を得る. □

命題 17.8 正項級数は和の順序をどう入れ代へても同一の値に収束する.

証明 ここで並べ替へとは, 自然数の全体 $\mathbb{N}$ から, 元の級数 $\sum a_n$ の項をなす数列 $\{a_n\}$ の項全体の集合 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ への全単射写像

$$\varphi : \mathbb{N} \to \{a_1, a_2, \cdots\}$$

を与へることに他ならない. その結果, 新たな級数 $\sum \varphi(n)$ が得られる. ここでは $\varphi(n) = a'_n$ と書くことにする. いま, 元の級数 $\sum a_n$ の第 n 部分和を S_n とし, 並べ代へた級数 $\sum a'_n$ の第 n 部分和を T_n をおくと任意の n に対し, ある m が存在して

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \{a'_1, a'_2, \cdots, a'_m\}$$

が成り立つから $S_n \leqq T_m$ である. ゆゑに

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqq \sum_{k=1}^{m} a'_k$$

である. 全く同様にこれと逆の不等式が成り立つから, 2 つの級数の和は等しい. □

定義 17.9 数列 $\{a_n\}$ を項とする級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は, もし級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば, <u>絶対収束</u> するといはれる.

定理 17.10 絶対収束する級数は収束する.

証明 与へられた級数を $\sum a_n$ とし, その第 n 部分和を S_n とおく. 仮定より $\sum |a_n|$ の部分和のなす数列が Cauchy 条件を満足するので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $m \geqq n > N$ ならば

$$\sum_{j=n+1}^{m} |a_j| < \varepsilon$$

である. このとき

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| \leqq \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| < \varepsilon.$$

即ち $\{S_n\}$ も Cauchy 条件を満足する. ゆゑに 17.3 によつて $\{S_n\}$ は収束する. □

定理 17.11 奇数番の項 $a_1, a_3, \cdots$ が全て正で, 偶数番の項 $a_2, a_4, \cdots$ が全て負である様な級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ （あるいはこれとは逆の符号の項からなる級数）を <u>交代級数</u> と呼ぶ. もし $\{a_n\}$ が 0 に収束すれば, この交代級数は収束する.

証明 与へられた交代級数の第 n 部分和を S_n とおくと, 明らかに

$$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < S_5 < S_3 < S_1$$

であり, $S_{2n} - S_{2n-1} = a_n \to 0\ (n \to \infty)$ であるから, $\{S_{2n}\}$ と $\{S_{2n-1}\}$ は同一の極限値に収束する. $\{S_n\}$ の一般項 S_{2m}, S_{2m+1} は常に S_{2m} と S_{2m+1} の間にあるのだから 2.16 を使つて S_n も収束することがわかる. □

例 17.12 収束するが絶対収束しない級数は条件収束するといはれる.
例へば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ は条件収束する級数である. 実際, これは 17.11 により収束する. しかし, 16.6 で示した通り,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

は発散する. 絶対収束する級数は和の順序をどう変更しても, 収束値は変はらないが, 条件収束する級数は和の順序を変更すればどんな値にでも収束させることができる. ([8a], p.62 を見よ)

命題 17.13 (優級数[23] による判定) すべての項が正である様な 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について $\sum b_n$ が収束するとせよ, このとき次が成り立つ.
(1) 有限個の $n\in\mathbb{N}$ を除いて $a_n \leqq b_n$ ならば $\sum a_n$ も収束する.
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ が有限値として存在すれば $\sum a_n$ も収束する.

ここで無限等比級数の収束発散についての 16.5 を思ひ出さう. 以下の定理には, 無限等比級数の重要性が現れてゐる.

命題 17.14 (正項級数と等比級数との比較) 正項級数 $\sum a_n$ について次が成り立つ:
(1) $0<r<1$ が存在して, 有限個の $n\in\mathbb{N}$ を除いて $\sqrt[n]{a_n}\leqq r$ が成り立つならば $\sum a_n$ は収束する.
(2) $\rho=\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ とおく. $\rho<1$ ならば $\sum a_n$ は収束する. (これは (1) を含む主張) 一方, $\rho>1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

証明 (1) 仮定より, $N\in\mathbb{N}$ が存在して, $n\geqq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n}\leqq r$ となつてゐる. このとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n &= \sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}a_n\\ &\leqq \sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}r^n=\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\frac{r^N}{1-r}<+\infty\end{aligned}$$

であるから, 級数 $\sum a_n$ は有界である. よつて 17.7 により収束する.
(2) $\rho<1$ のとき $\rho<r<1$ なる r を取つて固定すると, やはり, $N\in\mathbb{N}$ が存在して, $n\geqq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n}\leqq r<1$ となつてゐるため, (1) と同じ結論が導かれる. また $\rho>1$ であれば, 有限個の n を除いて $\sqrt[n]{a_n}>1$, つまり $a_n>1$ となるので $\sum a_n$ は発散する. □

[23] 正項級数 $\displaystyle\sum_n a_n$ が与へられたとき, 各項について $a_n\leqq b_n$ なる様な級数 $\displaystyle\sum_n b_n$ のこと.

補題 17.15 (d'Alembert(ダランベール) の判定法) 正項数列 $\{c_n\}$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ が存在し,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}<1$$

ならば級数 $\sum c_n$ は収束する. またこの極限が 1 より大きい場合, 級数 $\sum c_n$ は発散する.

証明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}<\rho<1$ なる ρ をとれば有限個の n を除いて

$$c_{n+1}/c_n \leqq \rho$$

が成り立つ. このとき N が存在して $n\geqq N$ ならば

$$c_n \leqq \rho c_{n-1} \leqq \rho^2 c_{n-1} \leqq \cdots \leqq \rho^{n-N}c_N$$

なので

$$\sum c_n \leqq \sum_{n=1}^{N-1} c_n + c_N\sum_{n=N}^{\infty}\rho^{n-N} = \sum_{n=1}^{N-1}c_n + \frac{c_N\,\rho^{-N}}{1-\rho}$$

ゆゑ, 17.7 により収束する.
一方 $r>1$ であれば, N が存在して $n\geqq N$ ならば $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}>1$ となるから,

$$n\geqq N \implies c_n>c_{n-1}>\cdots>c_N$$

となる. よつて

$$\sum c_n > \sum_{n=1}^{N-1}c_n + c_N\sum_{n=N}^{\infty} = \infty$$

となり発散する. □

例 17.16 以下の 2 つの公式をきちんと示すには, まだ道具が足りないので, これらの詳細については §32.3 まで保留にする.
Leibniz の公式 〔= 2.5 B2〕

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots.$$

Newton の公式〔= 2.8 B2〕

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} = \sin^{-1}1 = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ = 1+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{5\cdot 2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{7\cdot 2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{9\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots\end{aligned}$$

は級数に関する知識（特に Abel の連続性定理）などが必要なので 32.33 で述べる.

演 習 問 題

17.17 2 つの正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとせよ.
このとき次の級数も収束することを示せ. (Hint : 17.13 を利用) 〔= [2], p.146, 2〕

(1) $k \in \mathbb{N}$ について $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^k$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$. (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$.

17.18 次の級数の収束発散を調べよ. 〔= [2], p.146, 3(2), 4(4)〕

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot 2^{-n}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

17.19 次の和を求めよ. (n の簡潔な式で表せ.) 〔≒ 1.8 A2(1)(2)〕

(1) $1 - 3 + 3^2 - \cdots + (-3)^{n-1}$. (2) $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{27} + \cdots + \dfrac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$.

17.20 次の等比級数の公比 r を記した上で, 収束, 発散を調べ, 収束する場合はその和を求めよ. 〔≒ 1.8 A3(1)(2)(3)〕

(1) $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{3} - \cdots$. (2) $\sqrt{5} + 5 + 5\sqrt{5} + \cdots$.

(3) $3 - 3 + 3 - 3 + 3 - \cdots$. (4) $3 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} - \cdots$.

§ 18. 級数の積の収束 *

ここでは 2 つの収束する級数の積として定義される級数が収束するか否かを論じる.

定義 18.1 * 2 つの級数（この節では番号を 0 から始める）

(18.2)
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

に対して, $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$ をおき, 級数

(18.3)
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

を考へる. これを級数 (18.2) の積と呼ぶ.

(18.2) の 2 つの級数が収束するとき, (18.3) が収束するか否かを考察する. 先の 2 つの級数の極限値をそれぞれ A, B とし, 第 3 の級数が収束したとして, その極限値を C とする. すべての組 (i, j) $(i,\, j = 0,\, 1,\, \cdots)$ についての積 $a_i b_j$ ある定められた順序で加へていく級数が (18.3) であるから, $AB = C$ となることが期待できる. これに関して次の定理が知られてゐる.

定理 18.4 * （Mertens の定理 [24]）2 つの級数 (18.2) の双方が収束するとし, その極限値をそれぞれ A, B とする. また, 少なくとも一方が絶対収束すると仮定する. このとき, この 2 つの級数の積 (18.3) も収束し, その極限値は AB である.

証明 上記 (18.2) (18.3) で与へられた 3 つの級数, および各 k, n に対し,

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad A_{\mathrm{abs}} = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|,$$
$$B_k = \sum_{j=0}^{k} b_j, \quad B^*_{k+1} = \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \quad (\text{従つて } B = B_k + B^*_{k+1}),$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

とおく. 数列 $\{B_n\}$ は収束するので $G > 0$ が存在して, 任意の k について

(18.5)
$$|B^*_k| < G.$$

さらに, 任意に $\varepsilon > 0$ を与へるとき, 次のことが成り立つ. まづ, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ が絶対収束するので, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n > N$ について

(18.6)
$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon.$$

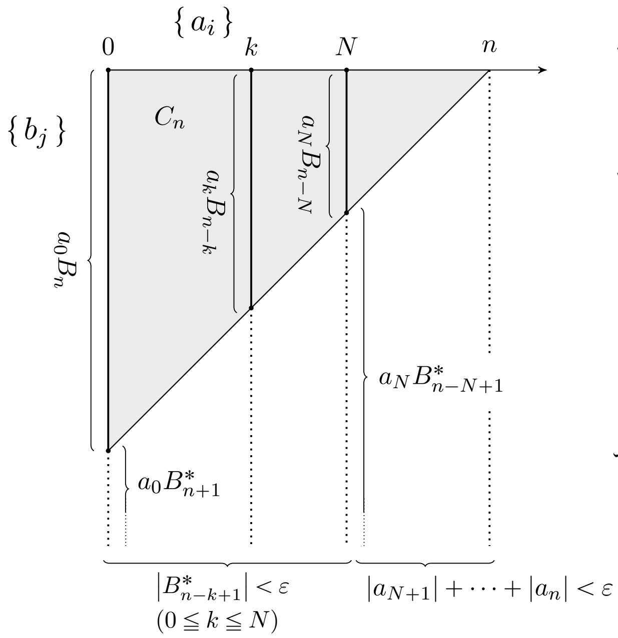
また, 再び $\{B_n\}$ が収束することを用ゐて, $N' > N$ が存在して, $n > N'$ ならば

(18.7)
$$|B^*_{n-k+1}| < \varepsilon \quad (0 \leqq k \leqq N).$$

[24] F. Mertens, Ueber die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 79 (1874), 182-184.

これらのことを合はせて使ふと $n > N'$ ならば

$$
\begin{aligned}
|A_n B - C_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k B^*_{n-k+1} \right| = \left| \sum_{k=0}^{N} a_k B^*_{n-k+1} + \sum_{k=N+1}^{n} a_k B^*_{n-k+1} \right| \\
&\leqq \sum_{k=0}^{N} |a_k B^*_{n-k+1}| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k B^*_{n-k+1}| \quad (\because \text{三角不等式 } (1.14)) \\
&\leqq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \varepsilon + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \cdot |B^*_{n-k+1}| \quad (\because (18.7)) \\
&\leqq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot \varepsilon + \left(\sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \right) G \quad (\because (18.5)) \\
&\leqq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \varepsilon + \left(\sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \right) G \\
&< A_{\mathrm{abs}} \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot G \quad (\because (18.6)) \\
&= (A_{\mathrm{abs}} + G) \varepsilon.
\end{aligned}
$$



ここで A_{abs} と G は ε とは無関係な定数であることに注意されたい. 従つて,

$$\lim_{n\to\infty} |C_n - A_n B| = 0.$$

以上を, 模式的に示すと左図の様になる. ここで $\lim_{n\to\infty} A_n B = AB$ が存在するのであるから, $\lim_{n\to\infty} C_n$ も存在する. 即ち,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} C_n &= \lim_{n\to\infty} A_n B \\
&= AB \, (= \lim_{n\to\infty} A_n \lim_{n\to\infty} B_n)
\end{aligned}
$$

である. □

注意 18.8 (1) 18.4 により, もちろん (18.2) の双方が絶対収束すれば (18.3) も収束して, 上の記号で $C = AB$ となる.

(2) もし (18.2) と (18.3) の 3 つの級数がすべて収束することが, 予めわかつてゐれば, それらの極限値 A, B, C について $C = AB$ が成り立つ (Abel による). 詳しくは [8a] の §1.23 を見られたい.

(3) 2 つの級数の商についての議論は冪級数に限るのが普通である. [8a] §2.25 に述べられてゐる.

§ 19. 函数列

集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上で, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して函数 $f_n(x)$ が定義されてゐるとする. この状況を

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots, \tag{19.1}$$

あるいは $\{f_n(x)\}$ と記して函数列と呼ぶ.

定義 19.2 上の状況の下で, 任意の $x \in E$ について, 極限

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

が (有限な値として) 存在するとき, 函数列 (19.1) は各点収束, あるいは 単純収束するといはれる. 〔= [12], p.17〕

上の 19.2 のとき, 各 $x \in E$ に対して, その極限を対応させる函数 $x \longmapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が得られる. この函数を函数列 (19.1) の極限函数と呼ぶ.

定義 19.3 領域 D において定義された函数 $f_n(x)$ からなる函数列 $\{f_n(x)\}$ と D の部分集合 B について, D 上で定義された函数 $f(x)$ が存在して, 次の条件 **UC** が成り立つとき, 函数列 $\{f_n(x)\}$ は B において $f(x)$ に一様収束するといはれる:

UC. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n > N$ かつ $z \in B$ ならば

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

注意 19.4 19.3 において, N が $x \in B$ に依存しないで選べることが本質的である.

補題 19.5 集合 $B \subset \mathbb{R}$ において一様に $f_n(x) \to f(x)$ で, 各 $f_n(x)$ が B の各点で連続であれば, $f(x)$ も B で連続である. (「連続」の定義は 6.18 を見よ.)

証明 任意に $a \in B$ をとり, 固定する. 任意の $\varepsilon > 0$ が与へられたとせよ. 一様収束性の仮定から $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n > N,\ x \in B \implies |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

ここで, $n (> N)$ を一つ選んで固定する. $f_n(x)$ の連続性から, ある $\delta > 0$ について,

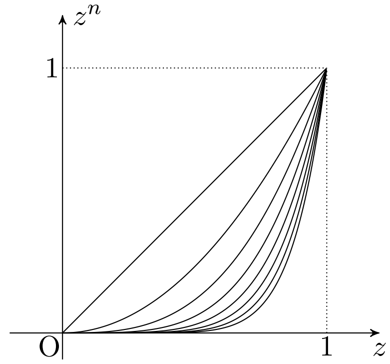
$$x \in B,\quad |x - a| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(a)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

以上から,

$$|f(x) - f(a)| \leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

がわかる. つまり $f(x)$ は a で連続である. □

例 19.6 $B=\{x\,;\,|x|<1\}$, $f_n(x)=x^n$ について, この函数列は B 上で各点収束するが, 一様収束しない. 極限函数 $f(x)$ は B 上の定数函数 0 である. しかるに任意に ε を与へたとき, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ となる n は x に依存する. 例へば x が 1 に近いと, n をその近さに応じて大きくする必要がある.

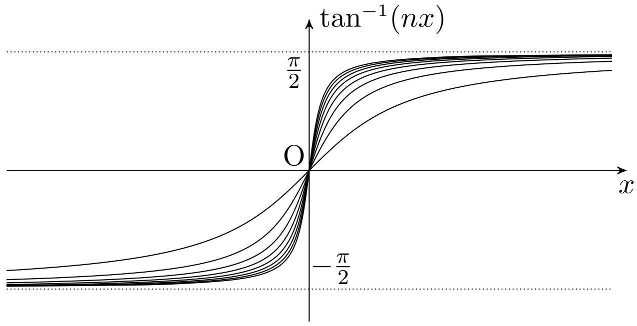


$n=1,\,2,\,\cdots,\,8$ についての x^n の図

例 19.7 $B=\{x\,;\,x\in\mathbb{R}\}$, $f_n(x)=\tan^{-1}(nx)$ について, この函数列は B 上で各点収束するが, 一様収束しない. 極限函数 $f(x)$ は

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (x<0), \\ 0 & (x=0), \\ \frac{\pi}{2} & (x>0) \end{cases}$$

であつて, $x=0$ で不連続である. 任意に ε を与へたとき, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ となる n は x に依存する. x が 0 に近いと, n をその近さに応じて大きくする必要がある.



$n=1,\,2,\,\cdots,\,8$ についての $\tan^{-1}(nx)$ の図

§ 20.　整級数の性質

同じ定義域をもつ函数の列

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots$$

についての極限や和（級数）を考へることは解析学において基本的なことであるが, ここでは各 $f_n(x)$ が $c_n(x-a)^n$ （c_n と a は定数）の形である場合に限つて議論する.

20.1.　整級数と収束半径

定義 20.1　$c_0, c_1, c_2, \cdots$ を定数とする. 定点 $a \in \mathbb{C}$ と変数 x について,

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \tag{20.2}$$

の形の級数を, 点 a を中心とする <u>整級数</u> と称する.

ここでは, 整級数の収束, 発散について議論する.

定理 20.3*　点 a を中心とする整級数

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \tag{20.4}$$

に対して, 次のいづれかが成り立つ.

(1) 任意の x に対して (20.4) は収束する. このとき, この級数の <u>収束半径</u> は ∞ であるといふ.

(2) ある $\rho > 0$ があつて, 任意の定数 $0 < r < \rho$ に対して, この級数は領域 $|x-a| \leqq r$ で絶対かつ一様に収束し, 領域 $|x-a| > \rho$ では発散する. このとき ρ をこの級数の <u>収束半径</u>, 区間 $(a-\rho, a+\rho)$ をこの級数の <u>収束円</u> と呼ぶことがある;

(3) いかなる $x\,(\neq a)$ に対しても収束しない. このとき, この級数の <u>収束半径</u> は 0 であるといひ, この場合は集合 $\{a\}$ を <u>収束円</u> とする.

証明　いま x_0 で (20.4) が収束するとする. このとき $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(x_0-a)^n = 0$ だから, 数列 $\{\,|c_n(x_0-a)^n|\,\}$ は有界, 即ち, 定数 $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$|c_n(x_0-a)^n| < M$$

である. このとき $|x-a| < |x_0-a|$ なる任意の x について

$$|c_n(x-a)^n| = |c_n(x_0-a)^n| \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n < M\left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n$$

であるが $\left|\dfrac{x-a}{x_0-a}\right| < 1$ ゆゑ $\sum M\left|\dfrac{x-a}{x_0-a}\right|^n$ は収束する. 従つて 17.13 から

$$\sum |c_n(x-a)^n|$$

は収束する. さらに 17.9 によつて $\sum c_n(x-a)^n$ 自身も収束する.

さて (1) でも (3) でもない場合は $0 < \sup\{\,|x-a|\,;\,(20.4)\text{ は } x \text{ で収束する}\,\} < +\infty$ が存在する. これが (2) のいふ ρ であることは上の議論からわかる. □

定理 20.5* （Cauchy-Hadamard（アダマール）の定理）整級数

(20.6) $$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

の収束半径 ρ は次で与へられる：

$$\rho = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

注意 20.7 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ の値が正の有限値であればその逆数が収束半径, その値が 0 であれば収束半径は無限大. その値が $+\infty$ であれば収束半径は 0.

補題 20.8* $x_0\,(\neq 0)$ について整級数

$$c_0 + c_1x_0 + c_2{x_0}^2 + \cdots$$

が収束するならば, $M > 0$ が存在して, 全ての $n \in \mathbb{N}$ について次が成り立つ：

$$|c_n| \leqq \frac{M}{|x_0|^n}.$$

証明 仮定より, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N \implies |c_n{x_0}^n| \leqq 1$ であるから,

$$M = \max\{\,|c_0|,\ |c_1x_0|,\ |c_1{x_0}^2|,\ \cdots,\ |c_N{x_0}^N|,\ 1\,\}$$

とおけば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $|c_n{x_0}^n| \leqq M$, つまり $|c_n| \leqq \frac{M}{|x_0|^n}$ である. □

証明 （20.5 の証明） $x = x_0$ で整級数 (20.6) が収束するとせよ. 20.8 より, M が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|x_0 - a| \leqq \frac{M^{\frac{1}{n}}}{|c_n|^{\frac{1}{n}}}$. $n \to \infty$ のとき $M^{\frac{1}{n}} \to 1$ であるから

$$|x_0 - a| \leqq \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

つまり $\rho \leqq 1\Big/\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ である.

ここで, もし収束半径 ρ が $\rho < 1\Big/\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ を満たすとすると

$$\rho < |x_0 - a| < 1\Big/\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

なる x_0 がとれる. いま, この不等式の右側を $|x_0 - a|\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ と書き代へて, $|x_0 - a|^n \displaystyle\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < \delta < 1$ なる δ をとれば, 有限個の n を除き $|c_n(x_0-a)^n| < \delta^n$ となることがわかるが, $\sum \delta^n$ が収束することから, (20.6) が $x = x_0$ で絶対収束することがわかる. ゆゑに 20.3(2) より $\rho \geqq |x_0 - a|$ でなくてはならず, 矛盾である. □

問 20.9 17.14(2) を用ゐた 20.5 の別証を与へよ.

(Hint ; 17.14(2) によれば, $\limsup \sqrt[n]{|c_n\,(x-a)^n|} = |x-a| \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ の値が 1 より小さいか大きいかによつて, $\sum |c_n\,(x-a)^n|$ の収束, 発散が決まる. 20.12 の証明も参考にせよ.)

例題 20.10 次の冪級数の収束半径を求めよ：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

解答 係数の n 乗根

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \tag{20.11}$$

の対数を考へると

$$\begin{aligned}\log n - \frac{1}{n}(\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n) &= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\bigl(\log j - \log n\bigr)\\ &= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\log\frac{j}{n} \ \to\ -\int_0^1 \log x\,dx \quad (n \to \infty)\\ &= -\Bigl[x\log x - x\Bigr]_0^1 = 1 \quad (\because \lim_{x\to 0} x\log x = 0).\end{aligned}$$

ゆゑに (20.11) の極限値は e である．よつて求める収束半径は $1/e$ である． □

定理 20.12* (d'Alembert の定理) 数列 $\{c_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

が存在するならば 級数 (20.2) の収束半径 ρ はこの極限に一致する．

証明 $\rho' = \lim_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}|$ とおく．$0 \neq |x_0 - a| < \rho'$ であれば, $r|x_0 - a| < \rho'$ なる $r > 1$ が存在する．よつて, $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n > N \implies r|x_0 - a| < \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

となる．このとき

$$\left|\frac{c_{n+1}(x_0-a)^{n+1}}{c_n(x_0-a)^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}(x_0-a)}{c_n}\right| < \frac{1}{r} < 1$$

であるから $\lim_{n\to\infty}|c_{n+1}(x_0-a)^{n+1}/c_n(x_0-a)^n| \leqq 1/r < 1$ となる．17.15 により, x_0 について (20.2) は収束する．よつて $\rho' \leqq \rho$ である．

そこで $\rho' < \rho$ であると仮定する．このとき $\rho' < |x_0 - a| < \rho$ なる x_0 が存在する．さらに $\rho' < r|x_0 - a| < \rho$ なる $0 < r < 1$ がとれる．ゆゑに $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n > N \implies \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| < r|x_0 - a|$$

となるが, これより $n > N$ ならば

$$\left|\frac{c_{n+1}(x_0-a)^{n+1}}{c_n(x_0-a)^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}(x_0-a)}{c_n}\right| > \frac{1}{r} > 1$$

であるから $\lim_{n\to\infty}|c_{n+1}(x_0-a)^{n+1}/c_n(x_0-a)^n| \geqq 1/r > 1$ となる．再び 17.15 により, x_0 について (20.2) は発散する．これは収束半径 ρ の定義に矛盾する． □

先の 20.10 を 20.12 を使って解いてみる.

例題 20.13 （20.10 再出）次の冪級数の収束半径を求めよ：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

解答 第 $n+1$ 項の係数と第 n 項の係数の極限は

$$\frac{n^n}{n!} \Big/ \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1 \Big/ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \quad (n \to \infty)$$

であるので, 収束半径は $1/e$ である. □

演 習 問 題

20.14 次の整級数の収束半径を求めよ.〔= [11], p.134, 問 3 (1)(2)(3)〕

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

20.15 次の整級数の収束半径を求めよ.〔= [11], p.124, 問 4 (1)(2)(3)(4)〕

(1) $\displaystyle 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$.

(2) $\displaystyle 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$.

(3) $\displaystyle 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (\alpha \neq 0, \notin \mathbb{N})$.

(4) $\displaystyle 1 + \frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{a^2+2} + \cdots + \frac{x^n}{a^n+n} + \cdots \quad (a > 0)$.

20.16 次の冪級数の収束半径を求めよ.〔= [12], p.20, 問 1.34〕

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$. (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$. (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-1)^n$.

20.17 0 を中心とする次の冪級数の収束半径を求めよ.〔= [12], p.22,25(1)〜(5)〕

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)\, x^{n-1}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n)\, x^n$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$.

20.2. 項別微分

冪級数で表された函数の微分は, 以下に述べる様に, とても簡明である.

定理 20.18★　a を中心とする冪級数

(20.19) $$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

の収束半径を ρ とする. 収束区間 $(a-\rho, a+\rho)$ 上でこの級数が与へる函数はこの区間の上の（何回でも）微分可能な函数であり, その導函数は各項の導函数の和

(20.20) $$c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

で与へられ, この級数も区間 $(a-\rho, a+\rho)$ で収束する.

証明 Step 1. 始めに最後の主張を証明する. そのために $\sqrt[n]{n} \to 1$ に注意する. 実際, $n \geqq 2$ について $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ をおくとき, $\delta_n > 0$ で,

$$n = (1+\delta_n)^n > 1 + \tfrac{1}{2}n(n-1){\delta_n}^2$$

だから, ${\delta_n}^2 < \frac{2}{n}$ となり, $\delta_n \to 0$ である. さて, このことから

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n\,c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \rho.$$

よつて (20.20) は (20.19) と同一の収束半径を持ち, $f_1(x)$ の収束半径も ρ である.

Step 2. 次に $f'(x) = f_1(x)$ を示したい. $|x-a| < \rho$ なる x に対し, 次の様におく:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x-a)^j = s_n(x) + R_n(x;a,f), \quad \text{（第 } n \text{ 部分和 + 剰余 (remainder)）},$$

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(x-a)^j, \quad R_n(x;a,f) = \sum_{j=n}^{\infty} c_j(x-a)^j,$$

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} jc_j(x-a)^{j-1} = \lim_{n\to\infty} {s_n}'(x) \quad \text{（項ごとに微分した級数）}.$$

さて $|x_0 - a| < \rho$ なる x_0 を任意に固定し, $|x_0 - a| < r < \rho$ なる r をとる. さらに x_0 と異なる x を x_0 に十分近くとる. このとき $|x-a| < r < \rho$ としてよい. ここで, 次式の左辺を

(20.21) $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f_1(x_0) = \Big(\frac{s_n(x)-s_n(x_0)}{x-x_0} - {s_n}'(x_0)\Big) + \big({s_n}'(x_0) - f_1(x_0)\big) + \frac{R_n(x;a,f) - R_n(x_0;a,f)}{x-x_0}$$

と 3 つに分ける. いま, 任意に $\varepsilon > 0$ が与へられたとせよ. (20.21) の右辺の第 1 項について, $s_n(x)$ は $x = x_0$ で微分可能だから, $\delta > 0$ が存在して $|x - x_0| < \delta$ ならば

(20.22) $$\left|\frac{s_n(x)-s_n(x_0)}{x-x_0} - {s_n}'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

第 2 項については $f_1(x_0)$ が収束する級数だから, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N_1$ ならば

(20.23) $$|{s_n}'(x_0) - f_1(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

第 3 項について,

$$\left|\frac{R_n(x;a,f)-R_n(x_0;a,f)}{x-x_0}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k \frac{(x-a)^k-(x_0-a)^k}{x-x_0}\right|$$
$$\leqq \sum_{k=n}^{\infty} c_k \left|\frac{(x-a)^k-(x_0-a)^k}{(x-a)-(x_0-a)}\right|$$
$$= \sum_{k=n}^{\infty} c_k \left|(x-a)^{k-1}+(x-a)^{k-2}(x_0-a)+(x_0-a)^{k-2}(x-a)^2+\cdots+(x_0-a)^{k-1}\right|$$
$$\leqq \sum_{k=n}^{\infty} k\,|c_k|\,r^{k-1} \qquad (\because\ |x-a|<r,\ |x_0-a|<r\,)$$

である．ここで (20.20) の各項の絶対値とつた級数が収束半径 ρ を持つて収束することと, $r<\rho$ であることから, 上の最後の和は収束級数の剰余である．よつて $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n>N_2$ ならば

$$\left|\frac{R_n(x;a,f)-R_n(x_0;a,f)}{x-x_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{20.24}$$

Step 3. (20.21), (20.22), (20.23), (20.24) より, $|x-x_0|<\delta$ かつ $n>\max(N_1, N_2)$ ならば

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f_1(x_0)\right| < \varepsilon$$

である．ここで, この式は n とは無関係に成り立つことに注意せよ．$x\to x_0$ として $f'(x_0)=f_1(x_0)$ を得る．しかるに x_0 は任意ゆゑ $f'(x)=f_1(x)$ が証明された． □

注意 20.25 20.18 から, 項別微分を繰り返へすことで, 高次の導函数の級数展開も得られることもわかつた.

注意 20.26 項別積分なるものについても後に（32.12 において）説明する.

§ 21. Landau の記号, 漸近展開

21.1. Landau の記号

Taylor の定理（14.1, 14.6）の主な応用として, 次の 3 つがある :

1. 剰余項を誤差と見做した, 函数の値の精密な計算（例として 14.10）.

2. 展開の項の個数を無限に増やしたときの等式（§22 Taylor 展開）.

3. 変数が中心に近付くときに剰余項が小さくなることを利用した函数の評価.
不定形の極限を調べるのに利用（§21.1 Landau の記号 と §21.2 漸近展開）.

1 では剰余項の大きさを評価できれば, 函数の値がある程度わかるから, 計算し易い形に剰余項を記述することが重要となる. **2** は, 無限の和をとれば一致するといふものであり, 総和する項に規則性があることが望ましい. **3** では, 定量的ではないが剰余項が本体部分と比べて相対的に小さいことに力点がある. ここでは **3** について述べる. そのために Laudau の記号 $o(\ )$ といふものを説明する. 以下は [2], pp.49–52 に基く.

定義 21.1 $x = a$ の近くで定義された 2 つの函数 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

のとき（$f(x)$ と $g(x)$ は $x = a$ においては定義されてゐなくてもよい）

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{21.2}$$

と書く. この記号を Landau の記号と称する（o はスモールオーと読む). 定義からわかる様に (21.2) は, a の近くでは $f(x)$ の大きさは $g(x)$ のそれに比べて無視できる程度に小さいことを意味する. 特に

$$f(x) = o(1) \quad (x \to a)$$

は $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ を意味する. さらに

$$f(x) = F(x) + o\big(g(x)\big) \ \ (x \to a) \quad \text{は} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x) - F(x)}{g(x)} = 0$$

を意味するものとする.

以下, 特に重要な $a = 0$, $g(x) = x^n$ の場合に限つて説明する. $f(x) = o(x^m)$ $(x \to 0)$ を満たす函数 $f(x)$ に対して, $f(x)$ の具体的な形は必要ないものの $x \to 0$ のときの評価が必要である様な場合に, $f(x)$ の代りに $o(x^m)$ を用ゐると便利である.

例 21.3 $\cos x - 1 = o(x)$ $(x \to 0)$. 実際 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} \underset{\text{l'Hôpital}}{=\!=\!=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1} = 0.$

例 21.4 同様に $\sin x - x = o(x^2)$ $(x \to 0)$. 実際 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = 0.$

例 21.5 $f(x) = 2x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$ は, $f(x) = 2x^2 + h(x)$ なる $h(x)$ について, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^2} = 0$, つまり $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - 2x^2}{x^2} = 0$ を意味する.

例 21.6 $\cos x = 1 + o(x)$ $(x \to 0)$ である. 例 21.3 の変形である.

例 21.7 $\sin x = x + o(x^2)$ $(x \to 0)$ である. 例 21.4 の変形である.

注意 21.8 Landau の記号を含む等式は, 左辺を右辺で評価する評価式 であつて, 普通の意味の等式ではないことに注意しなければならない.

例 21.9 $x \to 0$ のとき, $o(x^2) = o(x)$ ではあるが $o(x) = o(x^2)$ ではない.

注意 21.10 $x \to 0$ のとき, $o(x^m) - o(x^m) = o(x^m)$ ではあるが $o(x^m) - o(x^m) = 0$ といふ計算は正しくない. 実際, この左辺は評価式にすぎないので, それで評価される函数が常に 0 といふ決まつた函数になるとは限らないからである.

次の性質が基本的である.

定理 21.11 m, n を非負整数とする. $x \to 0$ のとき, 次の (1), (2), (3) が成り立つ.
(1) $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$. (2) $\dfrac{o(x^{m+n})}{x^m} = o(x^n)$. (3) $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$
(4) $m \leqq n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$.

証明 たとへば (2) については,

$$\frac{o(x^{m+n})}{x^m} \Big/ x^n = \frac{o(x^{m+n})}{x^{m+n}} \longrightarrow 0 \quad (x \to 0).$$

また (4) は

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^m) + o(x^n)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{o(x^m)}{x^m} + x^{n-m} \frac{o(x^n)}{x^n} \right\} = 0.$$

他も同様である. □

例 21.12 2 つ程, 例を挙げる :

$$\begin{aligned} x\{1 + x + o(x)\} - \{1 - 2x + o(x)\} &= x + x^2 + xo(x) - 1 + 2x + o(x) \\ &= -1 + 3x + x^2 + o(x^2) + o(x) = -1 + 3x + o(x) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{1 + 2x - x^2 + o(x^2)\}\{2 + x + o(x^2)\} \\ &\quad = 2 + 5x - x^3 + (2 + x)o(x^2) + (1 + 2x - x^2)o(x^2) + o(x^2)o(x^2) \\ &\quad = 2 + 5x - x^3 + o(x^2) + o(x^2) + o(x^4) = 2 + 5x + o(x^2) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

上の 21.12 の 2 つめの例と同様に計算すれば, 次のことがわかる.

系 21.13 2 つの函数 $f(x)$, $g(x)$ について

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n), \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

のとき

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots \\ + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

である.

21.2. 漸近展開

Taylor の定理の剰余項を $x \to 0$ のときに評価できれば, Landau の記号で記述できる.

定理 21.14 n を負でない整数とする. もし $f(x)$ が 0 を含むある開区間で, n 回まで微分可能であり, $f^{(n)}(x)$ が連続（つまり C^n 級）であれば

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ. これを Landau の o を用ゐた n 次の漸近展開と呼ぶ.
（ここで $f^{(n+1)}(x)$ には条件を課してゐないことに注意されたい）

証明 Taylor の定理により $0 < \theta < 1$ なる θ が存在して,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &\qquad + \frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

よつて

$$\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}x^n = o(x^n) \quad (\,?\,)$$

が示されれば証明が終る. しかるに $f^{(n)}(x)$ は $x = 0$ で連続であり, 常に $0 < \theta < 1$ であることに注意すれば, $x \to 0$ のとき $\theta x \to 0$ であるから,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}x^n}{x^n} = \lim_{x \to 0} \left(f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)\right)\frac{1}{n!} = 0$$

となり上記が成り立つ. □

例 21.15 Landau の o で評価した式をいくつか挙げる.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),$$

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 + x + o(x^2).$$

次の命題は 21.20 や 32.21 で使用される.

命題 21.16 負でない整数 n について, 次の式が成り立つ:

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n + \frac{X^{n+1}}{1-X}.$$

証明 右辺を通分する. その際に

$$(1 + X + X^2 + \cdots + X^n)(1 - X) = 1 - X^{n+1}$$

を利用すると, 結果が左辺に一致する. □

Landau の記号に使ひ慣れると, 次の例の様に, 極限の計算を l'Hôpital(ロピタル) の定理を使つた場合よりもわかり易くできる.

例 21.17 極限の計算例:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(x+o(x^2))}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\Big) = -\frac{1}{2}.$$

注意 21.18 $x=0$ 以外の点 $x=a$ での漸近展開を調べたければ, 調べた函数 $f(x)$ に対して, $g(x)=f(x+a)$ とおいて $g(x)$ の $x=0$ での漸近展開を調べれば良い.

命題 21.19 $n \geqq m$ ならば $o(x^m+o(x^n)) = o(x^m)$.

証明 実際,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m+o(x^n))}{x^m+o(x^n)}\frac{x^m+o(x^n)}{x^m} = 0\cdot(1+0) = 0$$

となる. □

例 21.20 一例として, $n=3$ についての 21.16 より得られる

$$\frac{1}{1-X} = 1+X+X^2+\frac{X^3}{1-X} = 1+X+X^2+o(X^2)$$

を使へば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2+o(x^2)} &= 1+(x^2+o(x^2))+(x^2+o(x^2))^2+o\big((x^2+o(x^2))^2\big)\\
&= 1+x^2+o(x^2)+(x^4+2x^2o(x^2)+o(x^4))\\
&\qquad\qquad +o(x^2+2x^2o(x^2)+o(x^4))\\
&= 1+x^2+o(x^2)+o(x^3)+o(x^2)\\
&= 1+x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

がわかる. この様にして $x\to 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin x} &= \frac{x}{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)} = \frac{x}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}\\
&= \frac{x}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}\\
&= 1+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2+o\big((\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2\big)\\
&= 1+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))+o\big((\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2\big)\\
&= 1+\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

を得る. これが text p.67 の問題 1.11 [A] 2 や p.134 の問題 2.8 [A] 1 の出題の意図であると思はれる.

Text の **1.11 [A]** (pp.67-68) の **2**, **5** の一部の問題は以下の様に改題すべきである.

例題 21.21 次の函数について $x \to 0$ のとき, Landau の o を用ゐた n 次の漸近展開を求めよ. 〔= 1.11 A2(4)〕 〔= 1.11 A2(4),(5)〕

(1) $\dfrac{e^x - 1}{x}$.　　(2) $\dfrac{\sin x}{x}$ (但し n は奇数で $n = 2m+1$ とせよ).

解答 (1) については,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n+1)!} + o(x^n).$$

(2) については,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+1})$$

となる. □

例題 21.22 次の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 〔= 1.11 A5(2)〕　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$ 〔≒ 1.11 A5(3)〕

解答 (1) については,

$$\frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^4)\right)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2!} + o(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(x) \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

(2) については,

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)} - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{\left(x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)} = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{3} + o(x)}{1 + o(x)} \longrightarrow -\frac{1}{3}$$

となる. □

例 21.23 α を定数としたとき, 開区間 $(-1, 1)$ で定義された函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ は, 負でない任意の整数 n について 21.14 の条件を満たすので,

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + o(x^n)}$$

と展開される.

演 習 問 題

21.24 次の函数について $x \to 0$ のときに $o(x^n)$ で評価した漸近展開を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{e^x}$.〔≒ 1.11 A, 2(2)〕

(2) $(e^x)^a$ (但し a は定数).〔≒ 1.11 A, 2(3)〕

(3) $\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

21.25 次の函数について $x \to 0$ のときに $o(x^3)$ で評価した漸近展開を求めよ.

(1) $e^{-x} \sin x$.〔≒ 1.11 A, 3(1)(2)〕

(2) $\tan x$.〔≒ 1.11 A, 3(3)〕

21.26 次の極限を漸近展開を用ゐて求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.〔= 1.11 A, 5(2)〕

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x - e^x + 1 + \frac{x^2}{2}}$.

§ 22.　Taylor 展開

22.1.　Taylor 展開の一般論

Taylor 展開について述べるために, 14.6 を思ひ出す.

定理 14.6　函数 $f(x)$, は区間 I を含む開区間で, n 回までは微分可能であるとする. a, $b \in$ のとき,

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n \tag{14.7}$$

かつ $0 < \theta < 1$ なる θ が存在する.

定義 22.1　函数 $f(x)$ は開区間 I において何度でも微分可能であるとする. $a \in I$ について（14.6 とは無関係に）一般に,

$$R_n(x; a, f) = f(x) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j \right)$$

と記して, これを $f(x)$ の a における n 次の剰余項と称する. 剰余項が

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x; a, f) = 0$$

なる性質を持つとき,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と書ける. これを $f(x)$ の $x = a$ における Taylor 展開あるいは冪級数展開と呼ぶ. 伝統的に $a = 0$ の場合の Taylor 展開を Maclaurin 展開とも称する.

注意 22.2　ここで, 上 (14.6) の和の最後の項

$$R_n(b; a, f) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n$$

は剰余項の典型的な例である.

22.2. 基本的な函数の Taylor 展開

ここでは, 実用のために, 基本的な函数の 0 における Taylor 展開について述べる. まづ, 次の命題は基本的である [25].

命題 22.3 任意の実数 x について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.$$

証明 $|x|$ より大きい $N\in\mathbb{N}$ を取り固定する. このとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^n}{n!}\right| &= \left|\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\frac{x^{n-N}}{N(N+1)\cdots(n-1)n}\right| \\ &= \left|\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\frac{x}{N}\cdot\frac{x}{N+1}\cdot\cdots\cdot\frac{x}{n-1}\cdot\frac{x}{n}\right| < \left|\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|^{n-N} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

となつて所望の結果を得る. □

最も重要なものは以下の 3 つである [26]:

例題 22.4 次の等式を証明せよ: 任意の実数 x に対し,

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \\ \cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \\ \sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

証明 14.8 により, これらの Taylor 展開定理 14.6 の剰余項 $R_n=R_n(x;0,f)$ は,

$$\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n,\quad \frac{\sin(\theta x)}{n!}x^n,\quad \frac{\cos(\theta x)}{n!}x^n$$

のいづれかであるが, $0<\theta<1$ より $e^{\theta x}<e^{|x|}$ であることと, $|\sin u|\leqq 1$, $|\cos u|\leqq 1$ に注意すれば, 22.3 によつて, どの剰余項も

$$R_n \longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)$$

であることがわかる. 従つて所望の展開が得られる. とくに, これらの収束半径は ∞ である. □

問 22.5 次の函数の $x=0$ における Taylor 展開を求めよ.

(1) e^{x^2}. (2) $\sin(3x)$.

[25] これは後の §32.3 で再登場する.
[26] これらは §32.3 の (32.17), (32.18), (32.18) でも述べられる.

定義 22.6 任意の数 α に対して

$$(\alpha)_r = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1) \tag{22.7}$$

と記す. α が自然数のときは, α 個から r 個とる順列の数 ${}_\alpha\mathrm{P}_r$ に他ならない. さらに一般 2 項係数を

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{(\alpha)_n}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1)}{r!} \tag{22.8}$$

と定義する. α が自然数のとき, 上記は 2 項係数 ${}_\alpha\mathrm{C}_r$（2.28 参照）に他ならない.

定義 22.9 実数 a に対し, 次の記法はよく使はれる :

$$\lceil a \rceil = \text{“}\, a \text{ 以上の整数全体の最小値}, \quad \lfloor b \rfloor = \text{“}\, a \text{ 以下の整数全体の最大値}.$$

例題 22.10 α を実定数とする. $|x| < 1$ について, 次の等式が成り立つことを示せ :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j. \tag{22.11}$$

証明 $f(x) = (1+x)^\alpha$ として, 14.11（Cauchy の剰余項による Taylor の定理）を使ふ [27]. このとき

$$\frac{f^{(j)}(0)}{j!} = \frac{(\alpha)_j}{j!} = \binom{\alpha}{j}, \quad R_n^*(x) = \frac{(\alpha)_n}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{(1-\theta)}{(1+\theta x)} \right)^{n-1} (1+\theta x)^{\alpha-1} x^n$$

である. $n \to \infty$ のとき $R_n^*(x) \to$ であることを示せばよい. $\lceil \alpha \rceil = k$ とおくと,

$$\begin{aligned} \left| \binom{\alpha}{n} \right| &= \left| \frac{(\alpha-k)_n}{n!} \right| \cdot \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1) \\ &\leqq \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1) \end{aligned}$$

で $|x| < 1$ だから,

$$\left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である. また $|x| < 1$ かつ $0 < \theta < 1$ ゆゑ,

$$\left| \frac{(1-\theta)}{(1+\theta x)} \right| \leqq 1,$$

$$0 < (1+\theta x)^{\alpha-1} \leqq \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1} & (\alpha - 1 \geqq 0 \text{ のとき}), \\ (1-|x|)^{\alpha-1} & (\alpha - 1 < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であつて,（θ は n に依るが）第 2 式の最右辺は n に依らない. 以上から

$$\left| R_n^*(x) \right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である. 従つて与式が成り立つ. □

注意 22.12 (1) α が自然数のとき, (22.11) は 2 項展開 2.28 に他ならない.
(2) (22.11) は $x = 1$ かつ $\alpha > -1$, および $x = -1$ かつ $\alpha > 0$ の場合も成立する. 詳しくは [8a], §2,23(4°) を参照せよ.

[27] 14.9（Lagrange の剰余項による Taylor の定理）だとうまく行かない.

例題 22.13 次の展開が成り立つことを 14.8(4) と (14.13) を用ゐて示せ.

$$\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad (-1 \leqq x < 1).$$

解答 (i) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき: 14.8(4) の最後の項

$$R_n(x) = \frac{1}{n}\Big(\frac{x}{1-\theta x}\Big)^n$$

を評価する. この範囲の x については $|1-\theta x| > 1$ であるから

$$\left|\frac{1}{n}\Big(\frac{x}{1-\theta x}\Big)^n\right| < \frac{1}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

である.

(ii) $0 < x < 1$ のとき: (この場合は 14.8(4) が機能しないので) (14.13) の最後の項

$$R_n^*(x) = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^n}$$

を評価する. この範囲の x については $|1-\theta| < |1-\theta x|$ であるから,

$$\left|\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^n}\right| = \left|\frac{x^n}{1-\theta x}\cdot\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^{n-1}}\right| \quad \text{(分母に 1 つ } (1-\theta x) \text{ を残しておくこと)}$$
$$< \frac{x^n}{1-\theta x} < \frac{x^n}{1-x} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

である.

(iii) 以上から与式は成り立つ. □

上記 22.13 の別証が 32.25 にある.

命題 22.14 点 c を含む区間 I で収束する 2 つの冪級数 (Taylor 展開)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-c)^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x-c)^j$$

に対して, I において収束する冪級数として

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Bigg)(x-c)^k$$

が成り立つ.

証明 18.4 を使へば容易に示される. □

演 習 問 題

22.15 実数 x について $e^x e^y = e^{x+y}$ が成り立つことを, 級数による表示 (22.4)

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$$

と 22.14 を利用して証明せよ. 〔≒§1.9, 性質 3〕

第 4 章　2 変数函数の微分法

§ 23.　多変数函数

23.1.　平面の方程式

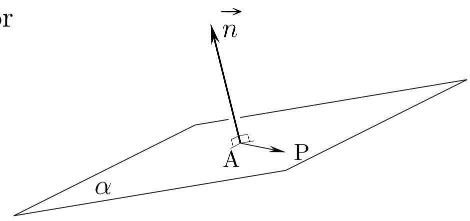
平面とは何かについては, 誰でもはつきりとした理解があると思ふ. しかし, これの数学的に厳密な定義を与へるのに戸惑ひを覚える. 至極当然と思はれてゐることについてさへ, 自省的に考察する数学においてはこの様なことがよく起る.

以下では, 零 vector $\vec{0}$ は, 任意の vector と垂直であるとする.

定義 23.1　空間内に, ある定まつた vector $\vec{n}(\neq \vec{0})$ と定点 A があり,

$$\alpha = \{\mathrm{P} \mid \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}\}$$

と書ける集合 α を, 平面といふ. 従つて



$$\alpha = \{\mathrm{P} \mid \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0\}$$

とも書ける. $\vec{n}$ は α の法線 vector と呼ばれる. 0 でない定数 k に対し, $k\vec{n}$ も α の法線 vector であり, それ以外に α の法線 vector は存在しない. また, 点 A は平面 α に属する. このことを, α は A を通つて $\vec{n}$ に垂直な平面であると称する.

注意 23.2 (1) 上記を座標を使つて書けば, 点 $\mathrm{P}(x, y, x)$ が点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ について,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0)$$

であるから, P が $\vec{n} = (p, q, r)$ に垂直な平面 α 上にあるための条件は

$$(23.3) \qquad p\,(x - x_0) + q\,(y - y_0) + r\,(z - z_0) = 0. \qquad \text{(平面の方程式)}$$

(2) 上のことから, xyz 空間における平面の方程式は, ある定数 p, q, r, d により,

$$px + qy + rz = d \qquad (p,\ q,\ r \text{ のうちどれか 1 つは 0 でない.})$$

の形 ($x,\ y,\ z$ の 1 次式) に書かれることが示される (確かめよ).

問 23.4　次の平面の方程式を求めよ.

(1) $\vec{n} = (3, 2, -1)$ に垂直で, 点 $\mathrm{A}(0, -3, 5)$ を通る平面.

(2) $\vec{n} = (0, 2, 1)$ に垂直で, 点 $\mathrm{A}(4, 1, -1)$ を通る平面.

問 23.5　次の方程式で与へられる平面の法線 vector と通る点を 1 つづつ挙げよ :

(1) $3x + 4y - 5z = 2.$　　(2) $-5x - 4z = 1.$

23.2. 開集合, 開領域

1 変数函数の定義域を論じるときに開区間や閉区間が重要であつた様に, 変数の個数が 2 つ以上の場合に定義域として, 開領域, あるいは, 閉領域なるものが重要である. 以下では xy 平面 $\{(x,y)\,|\,x,\ y\in\mathbb{R}\}$ を単に $\mathbb{R}^2$ と書くことがある. それを説明する.

定義 23.6 xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の定点 P と正の実数 δ が与へられたとき,

$$U(\delta,\mathrm{P})=\{\,\mathrm{Q}\,|\,\overline{\mathrm{PQ}}<\delta\,\}$$

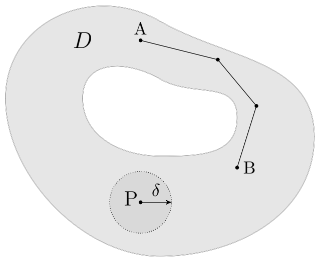
と書いて, これを P を中心とする δ 近傍, あるいは δ 開円板と称する.

定義 23.7 D を $\mathbb{R}^2$ 内の集合, P を xy 平面内の点とする. ある $\delta>0$ について $U(\delta,\mathrm{P})\subset D$ となるとき, P は D の内点であるといはれる. D の内点全体からなる集合を内部といふ, 一方, いかなる $\delta>0$ についても $U(\delta,\mathrm{P})\cap D=\varnothing$ となるとき, P は D の外点であるといはれる. D の外点全体からなる集合を外部といふ, D の内点でも外点でもない点を D の境界点と呼ぶ. D の境界全体からなる集合を ∂D と記し, D の境界と呼ぶ. D の内点と境界を合はせた集合を D の閉包とよぶ.

定義 23.8 $\mathbb{R}^2$ 内の集合について, いくつかの定義をする.

(1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D について, D に属する任意の点 P ごとに $U(\delta,\mathrm{P})\subset D$ となる $\delta>0$ が存在するとき, D は開集合であるといはれる. もちろん δ は P ごとに異なつてよい. 補集合が開集合である集合を閉集合と称する.

(2) xy 平面の部分集合 D が与へられたとし, D に属する任意の 2 点 A, B が D に含まれる折れ線（いくつかの線分をつないだもの）で結ばれるとする. この様な D は領域といはれる.



(3) 開集合である様な領域を開領域と呼ぶ.

(4) 閉集合である様な領域を閉領域と呼ぶ.

注意 23.9 D が開集合であることは D が内点のみからなることに他ならない.

問 23.10 次の集合は開集合, 閉集合, どちらでもない, のいづれであるか.

(1) 空集合 $\varnothing$.

(2) $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$（つまり $U(1,\mathrm{O})$）.

(3) $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geqq 1\}$.

(4) $\{(x,y)\,|\,-1<x-2y\leqq 1\}$.

問 23.11 次の集合 D について内部, 外部, 境界, 閉包を答へよ.

(1) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}=U(2,\mathrm{O})$.

(2) $D=\{(x,y)\,|\,|x+y|<1\}$.

(3) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,\,x\in\mathbb{Q},\,y\in\mathbb{Q}\}$.

23.3.　2 変数函数とその連続性

D を $\mathbb{R}^2$ の領域（定義は 23.8）とする．D から $\mathbb{R}$ への函数 $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ を考へるとき，$D \subset \mathbb{R}^2$ の元を標準的な座標を (x,y) で表すことにより，函数 $z = f(x,y)$ などと記すことが多い．これにより，定義域 D に属する各 (x,y) に対し，唯一つの z が定まることを意味する．f を 2 変数函数 と称する．集合

$$\Gamma_f = \{\,(x,y,f(x,y))\,|\,(x,y) \in D\,\}$$

を函数 f の graph と呼ぶ．これは xyz 空間に描かれ，一般には曲面を形成する．2 変数函数の 極限 は以下の様に定める．即ち $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to 0$ といふ意味で点 (x,y) が (a,b) 以外の点を動きながら限りなく (a,b) 近付くとき，$f(x,y)$ が α に限りなく近づくならば，次の様に記して，極限値は α であるといふ：

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha.$$

注意 23.12　上の極限の定義を厳密に述べれば次の様になる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，

$$0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \implies |\,f(x,y) - \alpha\,| < \varepsilon.$$

定義 23.13　領域 D で定義された函数 $f(x,y)$ と点 $(a,b) \in D$ について，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ \text{(極　限　値)}}} f(x,y) = \underset{\text{(代　入　値)}}{f(a,b)} \tag{23.14}$$

であるとき，$f(x,y)$ は (a,b) で 連続 であるといはれる．連続でないときは 不連続 であるといふ．函数 $f(x,y)$ が D のあらゆる点において連続であるならば D における 連続函数 であるといはれる

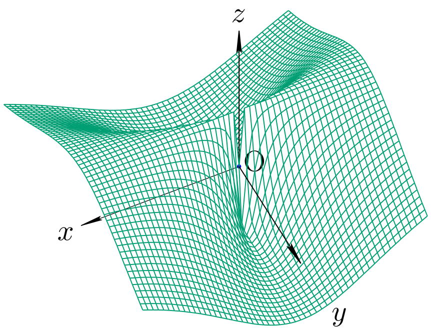
注意 23.15　上記の記号の下で，(23.14) を厳密に述べると次の様になる．
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，

$$0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \implies \big|f(x,y) - f(a,b)\big| < \varepsilon.$$

例 23.16　連続でない 2 変数函数の例：

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}, \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

で定められる函数 $z = f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で不連続である．また $(0,0)$ 以外の点では連続である．



§ 24. 偏微分法

24.1. 偏微分係数と偏導函数

多変数の函数の微分について述べる. 引き続き 2 変数に限定して説明するが, より多くの変数の場合も同様である.

定義 24.1 函数 $f(x,y)$ は開領域 D で定義されてゐるとする.

(1) 定点 $(a,b) \in D$ について,

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$
$$f_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

と定め, これらを偏微分係数と呼ぶ. ここに h, k はそれぞれ $(a+h,b)$, $(a,b+k) \in D$ となる様に動くものとする. これらはそれぞれ, x 軸方向の微分係数, y 軸方向の微分係数と考へられる. これらの値が存在するとき, 点 (a,b) において x に関して（あるいは y に関して）偏微分可能であると称する.

(2) 函数 $f(x,y)$ が各 $(x,y) \in D$ において, 偏微分可能であるとき, 函数

$$(x,y) \mapsto f_x(x,y) \quad \text{あるいは} \quad (x,y) \mapsto f_y(x,y)$$

が得られる. これらは $f(x,y)$ の偏導函数と呼び [28)]

$$z_x = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x},$$
$$z_y = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

などと記される.

例題 24.2 2 変数函数 $z = f(x,y) = 3x^3y^2 - 5xy^2 + xy - x + 3y + 1$ について, 偏導函数 z_x および z_y を求めよ. さらに, 点 $(3,1)$ における偏微分係数 $f_x(3,1)$ と $f_y(3,1)$ を求めよ.

解答 $z_x = 9x^2y^2 - 5y^2 + y - 1,\ \ z_y = 6x^3y - 10xy + x + 3.$
$f_x(3,1) = 76, \quad f_y(3,1) = 138.$ □

28) f_x, f_y の添字 x や y は飽くまで第 1 変数と第 2 変数を区別するものであり, ここには “値を代入する” ことはできない. 数学で使用する記号にはこの様な留意が必要なことが多い.

24.2.　接平面の方程式, 全微分

予備的考察.　函数 $f(x,y)$ は開領域 D で定義され, 定点 $(a,b) \in D$ において x と y について偏微分可能であるとせよ．曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ におけるこの曲面の接平面がいかなる場合に存在するか, また, その方程式はどう書かれるかについて述べる．はじめに, 接平面の定義をしないで直観的な認識に基き, 下の図を参考に予備的な考察を行ふ.

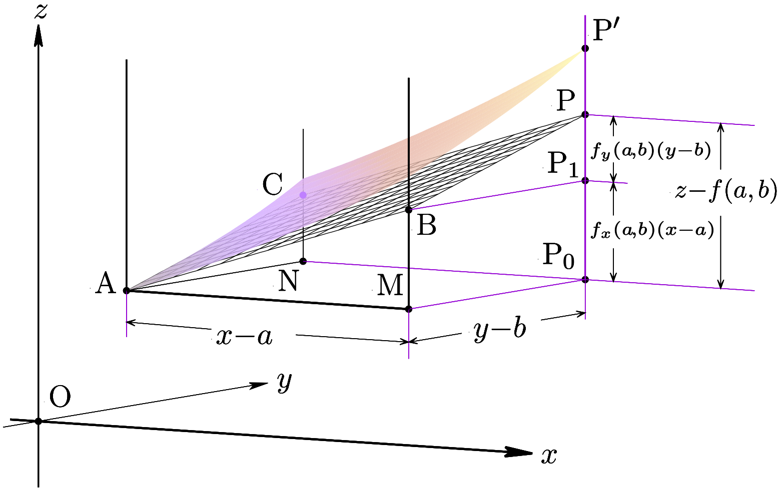


図 24.3　接平面

上の 24.3 において

(1) 点 $\mathrm{A}(a,b,f(a,b))$ や P' を通っている曲面が $z = f(x,y)$ の graph である；

(2) 黒い網目で描かれた平面（四辺形 ABPC を含む）が点 A における接平面ある；

(3) 点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ はこの平面上の任意の点である；

(4) 四辺形 ABPC は平行四辺形である；

(5) 点 C は曲面に隠れた点を指す；

(6) $\triangle\mathrm{ANC}$ と $\triangle\mathrm{BP_1P}$ は合同である；

となつてゐる.

ここで, $\triangle\mathrm{ANC}$ を含む平面と $\triangle\mathrm{BP_1P}$ を含む平面を図示すると次の様になる．青色で描かれた曲線が曲面の切り口であり, 赤色で描いた直線が接平面の切り口である.

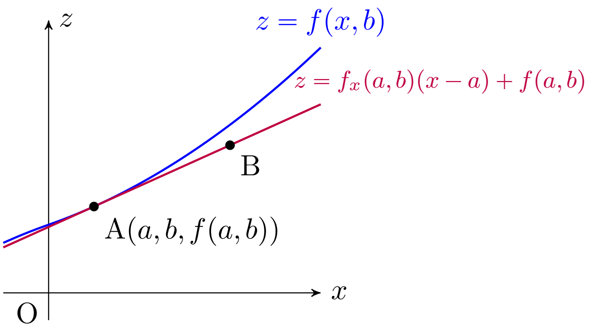


図 24.4　24.3 を x 軸前方から眺めた図

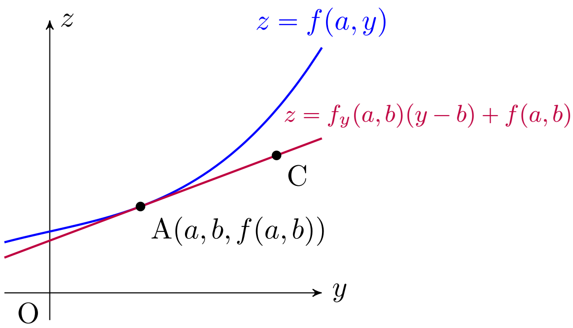


図 24.5　24.3 を x 軸前方から眺めた図

接平面が点 $(a,b,f(a,b))$ を通る事と偏微分係数の定義により, 24.4 の直線の方程式は

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f(a,b) \tag{24.6}$$

となる. 同様に, 24.5 の直線の方程式は

$$z = f_y(a,b)(y-b) + f(a,b) \tag{24.7}$$

となる. 一方, 接平面は (23.3) で記した形に書けるが, ここでは $(a,b,f(a,b))$ を通ることから

$$p(x-a) + q(y-b) = z - f(a,b)$$

と書ける. この係数 p, q を求めたい. ここで $y = a$ としたものが (24.6) に他ならず, $x = a$ としたものが (24.7) に他ならないから,

$$p = f_x(a,b), \quad q = f_y(a,b)$$

である. 以上をまとめると, 接平面の方程式が得られる：

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b).$$

以上を踏まへて, 以下, これらのことを厳密に述べていく.

注意 24.8 1 変数函数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数の存在は

$$f(x) = f(a) + p\,(x-a) + o(x-a) \quad (x \to a \text{ のとき})$$

となる定数 p が存在することだと述べられる. もちろん, このとき $p = f'(a)$ である. これと同様なことを 2 変数 (多変数) 函数で定義すると, 偏微分に加へて重要な, 次に述べる全微分可能性の定義が得られる.

定義 24.9 (全微分可能性, 接平面) 点 (a,b) を内点とする領域 D で定義された函数 $z = f(x,y)$ とについて定数 p, q が存在して

$$f(x,y) = f(a,b) + p(x-a) + q(y-b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\,\right) \tag{24.10}$$

と書けるとき (ここで o は 21.1 で定義した Landau の記号である), 即ち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - \bigl(f(a,b) + p(x-a) + q(y-b)\bigr)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \tag{24.11}$$

となるとき, 函数 $f(x,y)$ は点 (a,b) において全微分可能であるといはれる.
さらに, このとき

$$z = f(a,b) + p\,(x-a) + q\,(y-b) \tag{24.12}$$

で定義される平面を曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 (a,b) におけるこの曲面の接平面と呼び, この方程式を接平面の方程式 (の 1 つ) と称する.

注意 24.13 (24.15) は左辺の函数が右辺の x, y の 1 次式でよく近似されてゐることを示してゐる. 右辺の 1 次以下の部分を z とおいて得られる方程式が接平面を表すと考へることは, 直観的な理解と附合する.

注意 24.14 わかり易くするため, 以下では, xy 平面に垂直な接平面は考へない.

命題 24.15　函数 $z = f(x,y)$ が点 $\mathrm{A}(a,b)$ において全微分可能であれば, 偏微分可能であつて, A における接平面は

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b) \tag{24.16}$$

なる方程式で表される. また,

$$\overrightarrow{n} = (f_x(a,b),\ f_y(a,b),\ -1)$$

がこの接平面の法線 vector である（23.1 を参照）.

証明　(24.10) の記号で, 次のことを示せばよい：

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

(24.10) より

$$f(a+h,b) - f(a,b) = ph + o(h).$$

ゆゑに

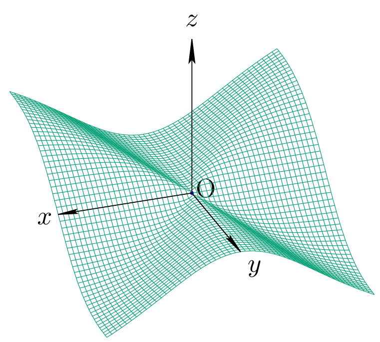
$$p = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

q についても同様である. □

例へば 23.16 や, すぐ下の 24.17 の様な場合, 原点では, 接平面が存在しない. この様な場合は（原点で）全微分不可能といはれる.

例 24.17　連続で偏微分可能ではあるが, 全微分可能ではない（つまり接平面を持たない点（ここでは原点）のある）2 変数函数の例：

$$z = \begin{cases} \dfrac{-x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}, \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき}. \end{cases}$$



定理 24.18　函数 $z = f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であれば, (a,b) において連続である.

証明　極限 (24.11) において, 分母が 0 に限りなく近づくから, 分子の極限は 0 である. 従つて $\bigl|f(x,y) - f(a,b)\bigr| \to 0$ となり, $f(x,y)$ は点 (a,b) で連続である. □

定理 24.19 (a,b) を含む開領域で定義された函数 $z=f(x,y)$ について, 偏導函数 $f_x(x,y)$ がその領域で存在し, $f_x(x,y)$ は (a,b) で連続であり, さらに $f_y(a,b)$ が存在するならば, $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能である. このことは, 変数 x と変数 y の役割を入れ替へても同様である.

証明 前半を示せば十分であらう. まづ, (a,b) を中心とするある開円板 U で仮定が成り立つとしてよい. $h(\neq 0)$ と $k(\neq 0)$ を十分小さくとつて, $(a+k,b+h)\in U$ とし,

$$\begin{aligned} &f(a+h,b+k)-f(x,y)\\ &\qquad = \big(f(a+h,b+k)-f(a,b+k)\big)+\big(f(a,b+k)-f(a,b)\big) \end{aligned}$$

と書いて, これの前 2 項と後 2 項をそれぞれ別に考察する.

<u>前 2 項について</u>. 変数 x に関しての平均値の定理から

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}{h}=f_x(a+\theta h,b+k)$$

かつ $0<\theta<1$ なる θ が存在する. しかるに

$$\rho_1=f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)$$

とおくと $f_x(x,y)$ の連続性から

$$\sqrt{h^2+k^2}\to 0 \quad のとき \quad \rho_1\longrightarrow 0.$$

<u>後 2 項について</u>. いま

$$f(a,b+k)-f(a,b)=f_y(a,b)k+\rho_2 k$$

で ρ_2 を定めると $f_y(a,b)$ の存在性と定義から $k\to 0$ のとき,

$$\rho_2=\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}-f_y(a,b)\longrightarrow 0.$$

ここで,

$$\sqrt{h^2+k^2}\to 0 \quad のとき \quad k\to 0$$

であることに注意すれば, 以上をまとめて

$$\begin{gathered} f(a+h,b+k)-f(x,y)=\big(f_x(a,b)h+\rho_1 h\big)+\big(f_y(a,b)k+\rho_2 k\big),\\ \sqrt{h^2+k^2}\longrightarrow 0 \quad のとき \quad \rho_1\longrightarrow 0,\ \rho_2\longrightarrow 0. \end{gathered}$$

このとき,

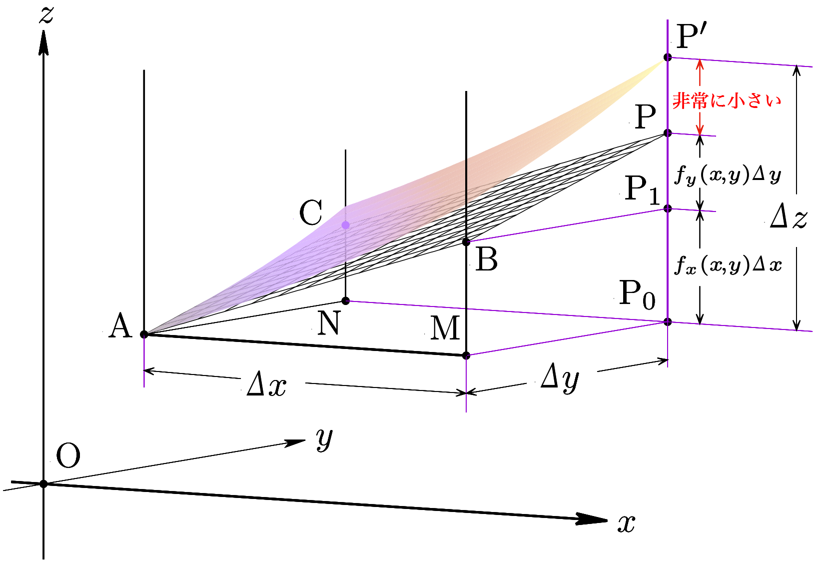
$$\frac{|\rho_1 h+\rho_2 k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqq\frac{|\rho_1 h|+|\rho_2 k|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\,|\rho_1|+\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\,|\rho_2|\longrightarrow 0$$

である. 即ち, $\sqrt{h^2+k^2}\longrightarrow 0$ のとき

$$f(a+h,b+k)-f(x,y)=f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k+o\big(\sqrt{h^2+k^2}\,\big).$$

これは $f(x,y)$ が全微分可能であることの定義に他ならない. □

全微分. 全微分とは, 接平面が存在する条件を動的に捉えた式である. 即ち, 上図の点 A に動的な考慮をして $\mathrm{A}(x,y,z)$ と記し, x, y の増分 Δx, Δy に応じた z の増分 Δz を量る式である. 下図において, $(\Delta x, \Delta y)$ を $(0,0)$ に近づけながら, A を中心にして zoom up する.



その際, P があたかも動かない様に zoom up できる. この状況では, PP′ が限りなく, 0 に近付き, Δz が $\mathrm{P_0P}$ に近づく. 即ち, $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ のとき,

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \fallingdotseq f_x(x,y)\,\Delta x + f_y(x,y)\,\Delta y$$

の両辺の比は 1 に限りなく近づく [29]. このことを象徴的に次式で表す.

$$(24.20) \qquad dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy \qquad (\underline{\text{全微分}})$$

この両辺を $z = f(x,y)$ の 全微分 と呼ぶ. これは, 当然, 接平面が存在するときだけ成り立つ. また, この式には, 定点 A は自由にとれるといふ含みもあることに注意して欲しい.

[29] 正確には, 両辺を $\mathrm{AP_0} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ で割った商の $\mathrm{P_0} \to \mathrm{A}$ での極限が一致する.

例題 24.21 2 変数函数
$$z = f(x,y) = \frac{3xy}{x^2+y^2+1}$$
の graph 上の点 A$(1,-1,-1)$ におけるこの graph の接平面の方程式と法線 vector (の 1 つ) を求めよ.

解答 偏導函数は
$$f_x(x,y) = \frac{3y(-x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{3x(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$
であるから (各自で確認せよ),
$$f_x(1,-1) = -\frac{1}{3}, \quad f_y(1,-1) = \frac{1}{3}.$$
よつて, 求める接平面の方程式は
$$z-(-1) = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-(-1)),$$
$$\therefore\ x - y + 3z = -1 \quad \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$
となる. これの法線 vector は
$$(1,\ -1,\ 3) \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$
である. □

例題 24.22 函数 $z = x^2 \sin y$ は至るところで全微分可能である. このことを既知として, この函数の全微分を求めよ.

解答 $z_x = 2x \sin y$, $z_y = x^2 \cos y$ なので,
$$dz = (2x \sin y)\,dx + (x^2 \cos y)\,dy \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$
となる. □

演 習 問 題

24.23 偏導函数を求めよ.

(1) $z = x^2 - 3xy^2 + 2y^3 - 3x - 4y + 1$. (2) $z = e^{-x^2-y^2}$.

(3) $z = \dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$. (4) $z = \log(x^2+3y^2)$.

24.24 次の各問において, 函数 $(x,y) \mapsto z$ は点 A で全微分可能である. このことを既知として, その graph (曲面) の点 A における接平面の方程式とその法線 vector を求めよ.

(1) $z = x^2 - 3xy^2 + 2y^3 - 3x + 4y + 1$, A$(1,1,2)$. (2) $z = e^{-x^2-y^2}$, A$(1,1,e^{-2})$.

(3) $z = \dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$, A$(1,1,\frac{1}{2})$. (4) $z = \log(x^2+3y^2)$, A$(1,1,\log 4)$.

24.25 全微分を求めよ.

(1) $z = x^2 - 3xy^2 + 2y^3 - 3x - 4y + 1$. (2) $z = e^x \sin y$.

24.3. 多変数の合成函数の微分

命題 24.26 (合成函数の微分, 連鎖律). 函数 $z = f(x, y)$ は開領域 D 上で全微分可能とする. 微分可能な 2 つの函数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ について次式が成り立つ:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

連鎖律の直観的な説明. 函数 $z = f(x, y)$ は全微分可能であるから, x, y の増分 Δx, Δy と, それに応じた z の増分 Δz の間には,

$$\Delta z \fallingdotseq f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y$$

なる関係がある. 但し, この両辺の比は $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ のとき, 1 に収束する. この状況で t の増分 Δt に対応する x, y の増分が Δx, Δy であるとすれば,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \fallingdotseq f_x(x, y)\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y)\,\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

であり, やはり, この両辺の比は $\Delta t \to 0$ のとき, 1 に収束する. よって

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x, y)\,\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\,\frac{dy}{dt}.$$

これが示したい式であった.

証明 簡単のために合成函数を

$$g(t) = f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)$$

と書く. 仮定と (24.10) と (24.15) より 2 点 (x, y), (a, b), およびこの 2 点を結ぶ線分の全体が D に属するとき,

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + o\Bigl(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\,\Bigr).$$

ここで $o(\ )$ は Landau の記号 21.1 である. 始めに t を, 点 $\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)$ が D に属す様に固定して, 上の x, a, y, b をそれぞれ $\varphi(t+\Delta t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t+\Delta t)$, $\psi(t)$ に書き換へる. ここで Δt を十分小さくとれば, 点 $\bigl(\varphi(t+\Delta t), \psi(t+\Delta t)\bigr)$ に加へて, この点と $\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)$ を結ぶ線分の全体も D に属することに注意する. さらに x, y の増分 $\Delta x = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$, $\Delta y = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$ を使つて書くと

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\bigl(\varphi(t+\Delta t), \psi(t+\Delta t)\bigr) - f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o\Bigl(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,\Bigr)}{\Delta t} \\
&= f_x(x, y) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} \cdot \frac{o\Bigl(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,\Bigr)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\
&= f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt} + \sqrt{\Bigl(\frac{dx}{dt}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{dy}{dt}\Bigr)^2} \cdot 0 \\
&= f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

これで所望の等式が示された. □

例 24.27 函数

$$z = e^x \sin y, \quad \begin{cases} x = t^2, \\ y = 3t - 1 \end{cases}$$

の合成写像 $z = e^{t^2} \sin(3t-1)$ の導函数を 2 通りの方法で求めてみる.
方法 ①. 1 変数函数の微分の公式だけを使って計算すると：

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (e^{t^2} \sin(3t-1))' \\ &= (e^{t^2})' \sin(3t-1) + e^{t^2} (\sin(3t-1))' \quad (\because\ 7.9) \\ &= 2t e^{t^2} \sin(3t-1) + e^{t^2} \cos(3t-1) \cdot 3 \quad (\because\ 9.1,\ 10.3,\ (11.3), (11.2)) \\ &= e^{t^2} \bigl(2t \sin(3t-1) + 3\cos(3t-1)\bigr). \end{aligned}$$

方法 ②. 前 page の 24.26 を使ってみると：

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (e^x \sin y) \cdot 2t + (e^x \cos y) \cdot 3 \\ &= e^{t^2} \sin(3t-1) \cdot 2t + e^{t^2} \cos(3t-1) \cdot 3 \qquad \text{（最後は } t \text{ だけの式にする）} \\ &= e^{t^2} \bigl(2t \sin(3t-1) + 3\cos(3t-1)\bigr) \end{aligned}$$

となり ① の計算結果と一致する.

次は 24.26 から直ちにわかる.

命題 24.28 （合成函数の微分, 連鎖律）. 函数 $z = f(x, y)$ は全微分可能とする. 偏微分可能な 2 つの函数 $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ について,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

証明 2 つの変数 u, v の一方を固定し, z を残りの変数の 1 変数函数と考えれば, 24.26 から直ちに得られる. □

例題 24.29 $f(x, y) = x^2 + 3xy + x - 2y$ と $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を合成した函数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について $\frac{\partial z}{\partial r}$ 及び $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ を 24.28 を使って求めよ.

解答 それぞれ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2x + 3y + 1)\cos\theta + (3x - 2)\sin\theta \\ &= 2r\cos^2\theta + 6r\sin\theta\cos\theta + \cos\theta - 2\sin\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= (2x + 3y + 1)(-r\sin\theta) + (3x - 2)r\cos\theta \\ &= 2r^2\cos\theta\sin\theta - 3r^2\sin^2\theta - r\sin\theta + 3r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta \\ &= r^2(2\cos\theta\sin\theta - 3\sin^2\theta + 3\cos^2\theta) - r(\sin\theta + 2\cos\theta) \end{aligned}$$

となる. □

演 習 問 題

24.30 次の 3 つの函数による合成函数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ について $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.
但し, 前 page の方法 ② (連鎖律 24.26) で行ひ, z_x, z_y, $\dfrac{dz}{dt}$ の 3 つを記せ.

(1) $f(x,y) = 2x^3 + 3xy - y^2$, $\varphi(t) = e^{2t}$, $\psi(t) = e^{3t}$.
(2) $f(x,y) = 3\cos(x-y)\sin(x+y)$, $\varphi(t) = t^2 - 1$, $\psi(t) = 3t$.

24.31 函数

$$z = e^{xy}\sin(x+y), \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u - 2v \end{cases}$$

から得られる合成函数 $z = g(u,v)$ について,
(1) 合成函数 $z = g(u,v)$ を具体的な形に求め, 合成函数の微分公式を使用しないで, $g(u,v)$ を u, v に関してそのまま微分することにより, 偏導函数 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.
(2) 24.28 を用ゐて計算し, (1) の結果と一致することを確かめよ.

24.32 次の 3 つの函数による合成函数 $z = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ について $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ. 但し, 方法は合成函数の微分 2 (連鎖律) を用ゐるものとする.
(1) $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, $\varphi(u,v) = u\cos v$, $\psi(u,v) = u\sin v$.
(2) $f(x,y) = xy^2$, $\varphi(u,v) = 2u + v$, $\psi(u,v) = u - 2v$.

24.33 $z = f(x,y)$ の偏導函数は x と y の組が指定されて定まるのであり, z_x は z, x だけでは定まらない [30). このことを確認してみる.
$z = 2x + y = x + (x+y)$ は $u = x$, $v = x + y$ により $z = u + v = x + v$ であるとも見られる.
(1) x と y の函数として z_x を求めよ.
(2) $x = u$ と v の函数として $z_x (= z_u)$ を求めよ.

[30) 偏導函数を計算する際, どの変数を固定した上でどの変数で微分するのか, が重要だからである. また, 数学の記号には細心の注意が必要であり, 意味を確実に理解して使用しなければならない, という教訓も得られる.

§ 25. 高次偏導函数

25.1. 高次導函数と偏微分の順序

以下の様に 2 次の導函数を定義する.

定義 25.1 函数 $z = f(x,y)$ に関して, 偏導函数 z_x, z_y が存在して, それぞれがまた偏微分可能であるとき,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = z_{xy} = f_{xy}(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = z_{yx} = f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = f_{yy}(x,y)$$

と記して, これらを 第 2 次偏導函数 と呼ぶ. (別色の部分の順序が逆転することに注意.)

これに対して z_x と z_y を 第 1 次偏導函数ともいう.

合成函数の高次偏導函数. 次の公式は, 合成函数の高次の偏導函数の扱ひ方に慣れるのに恰好の例である. (理工系の学生たる者は, この計算は一生に一回は必ずやつておくべき.)

例題 25.2 ある開領域 D で定義された函数 $z = f(x,y)$ が与へられたとせよ. この函数は, D 上ですべての第 2 次導函数を持ち,

$$z = f(x,y), \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

の合成函数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ もすべての第 2 次導函数を持つとする. さらに

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}$$

が成り立つてゐると仮定する (25.4 参照). このとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

が成り立つことを証明せよ.

解答 右辺を計算して左辺になることを示す証明も見受けられるが, 本来は左辺 ($f(x,y)$ の Laplacian(ラプラシアン) と呼ばれる) が最初にあるのだから, それを計算したら右辺になる, という証明が望ましい. その様に証明するために, r と θ を x と y で表せば

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\tfrac{y}{x}.$$

これを使つて, 計算過程で逐次 x, y を r, θ に置き換へてゆけばよい. 少し書くと,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}.\end{aligned}$$

この続きを計算し, さらに同様に $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を計算することで, これらの和から上記の右辺までの変形を是非, 試して欲しい. □

問 25.3 25.2 の解答の続きを計算し, 完成させよ.

次に, 2 次の偏導関数 z_{xy} と z_{yx} は, この両者が連続関数であれば一致すること [31] を説明する.

定理 25.4 開領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を定義域とする偏微分可能な函数 $z = f(x,y)$ について, z_{xy} と z_{yx} が存在して, どちらも D において連続であれば $z_{xy} = z_{yx}$ が成り立つ.

証明 1 点 $(x,y) = (a,b) \in D$ において

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

を証明する. 十分小さい絶対値をもつ実数 h, k に対して [32]

$$\mathit{\Delta} = f(a+h,b+k) - f(a,b+k) - f(a+h,b) + f(a,b)$$

とおき, これを 2 通りに計算する. そのために

$$\varphi(x) = f(x,b+k) - f(x,b),$$
$$\psi(y) = f(a+h,y) - f(a,y)$$

とおくと, 仮定より $\varphi(x)$ は微分可能で $\mathit{\Delta} = \varphi(a+h) - \varphi(a)$ であるから, 平均値の定理により

$$\mathit{\Delta} = h\varphi'(a+\theta_1 h), \quad 0 < \theta_1 < 1$$

と書ける. さらに

$$\varphi'(a+\theta_1 h) = f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a+\theta_1 h, b)$$

であるから, 再び平均値の定理から

$$\varphi'(a+\theta_1 h) = kf_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k), \quad 0 < \theta_2 < 1$$

と書ける. ゆえに

$$\mathit{\Delta} = hkf_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

となる. $\psi(y)$ についても同様の推論で

$$\mathit{\Delta} = hkf_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k)$$
$$0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1$$

なる表示を得る. 従つて

$$f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k).$$

ここで $h \to 0$, $k \to 0$ とすれば, $f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ の連続性より,

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

を得る. □

[31] 教科書 p.70, 定理 1.28

[32] 2 点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれる程度に小さいとする.

定義 25.5 (<u>高次偏導函数</u>) 多変数函数をその変数に関して逐次偏微分していくことで, 高次の偏導函数が得られる. 例へば $z = f(x, y)$ の 3 次の偏導函数をすべて書けば

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f_{xxx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = f_{xxy}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f_{yxx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = f_{xyy}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = f_{yxy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = f_{yyy}(x, y)$$

となる. もちろんその都度の偏微分が可能であることを仮定してゐる. さらに高次の偏導函数も同様に定義される.

25.4 より簡単に以下のことが成り立つことが示される. 証明は容易である.

命題 25.6 高次偏導函数は, その次数の高次偏導函数のうち然るべきいくつかが, ある領域 D で連続であれば, D においては, それぞれの変数で何回偏微分したかのみに依り, 偏微分の順序には依らないで定まる. (例 : $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$.)

25.2. C^n 級函数

変数が 2 つ以上の函数についても C^r 級函数を定義する. 2 変数でのみ述べておく.

定義 25.7 境界を含まない<u>開領域</u> D で定義された 2 変数函数 $z = f(x, y)$ が D の至るところで偏微分可能であり, 偏導函数 z_x と z_y がともに連続であるとき, $f(x, y)$ は <u>C^1 級</u>であるといはれる. 同様に D の至るところで第 r 次偏微分係数が存在し, すべての r 次偏導函数が D において連続であるとき, $f(x, y)$ は <u>C^r 級</u>であるといはれる. どんな $r \geqq 0$ についても C^r 級である様な函数は, <u>C^∞ 級</u>であるといはれる.

注意 25.8 例へば C^1 であるが C^2 級でない函数を 1 つ構成してみるとよいが, この講義録に現れるほぼすべての 2 変数函数は定義域において, C^∞ 級であるので, 当面は上の定義 25.7 をあまり気にしなくてよいと思ふ.

演 習 問 題

25.9 次の函数の第 1, 第 2 次偏導函数の全て (z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}) を求めよ.

(1) $z = x^3 + 2xy + y^2$. (2) $z = \dfrac{1}{x^2 y}$.

(3) $z = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$. (4) $z = e^{xy}\sin(x^2 + 2y^2)$.

§ 26.　多変数函数の Taylor の定理と極値

26.1.　多変数函数の Taylor の定理

2 変数函数についての Taylor の定理を説明する．h, k を定数とする．
以下では $h\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)+k\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ を $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$ と書くこととする．

補題 26.1　函数 $f(x,y)$ が偏導函数を持つとき, 次の等式が成り立つ：

$$\frac{d}{dt}f(a+ht,b+kt)=hf_x(a+ht,b+kt)+kf_y(a+ht,b+kt)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+ht,b+kt).$$

つまり $\frac{d}{dt}$ と $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)$ がこの様な場合には, 同じ効果をもたらす.

証明　$x=a+ht$, $y=b+ht$ とみて, 左辺に 24.26 を適用すれば直ちに結果を得る．　□

$f(x,y)$ が何度でも（十分多くの回数）偏微分可能であれば 26.1 を繰り返へして,

$$\frac{d^j}{dt^j}f(a+ht,b+kt)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a+ht,b+kt) \tag{26.2}$$

を得る．ここで, $j=1$ は上の通りで $j=2$, 3 等について,

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+ht,b+kt)&=h^2f_{xx}(a+ht,b+kt)+2hkf_{xy}(a+ht,b+kt)\\&\quad+k^2f_{yy}(a+ht,b+kt),\\ \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a+ht,b+kt)&=h^3f_{xxx}(a+ht,b+kt)+3h^2kf_{xxy}(a+ht,b+kt)\\&\quad+3hk^2f_{xyy}(a+ht,b+kt)+k^3f_{yyy}(a+ht,b+kt)\end{aligned} \tag{26.3}$$

などとなる（2 項展開 !）ことは, 容易に確かめられる．

定理 26.4　函数 $z=f(x,y)$ は開領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された C^n 級函数（25.7 参照, つまり n 次までのすべての (高次) 偏導函数を持ち, それらが連続）であるとする．また, 点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれるとせよ．このとき

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k), \tag{26.5}$$

かつ $0<\theta<1$ なる θ が存在する．

証明　$g(t)=f(a+ht,b+kt)$ に対して, Taylor の定理 (の別形 14.6) を区間 $[0,1]$ に関して用ゐることで,

$$g(1)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}g^{(j)}(0)+\frac{1}{n!}g^{(n)}(\theta),\quad 0<\theta<1$$

なる θ の存在がわかる．一方, (26.2) の式で $t=0$, θ とすることで,

$$g^{(j)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b),\quad g^{(n)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)$$

である．これらから (26.5) を得る．　□

Taylor の定理 26.4 を $n=1$ の場合に書き下せば次の様になる.

命題 26.6 開領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を定義域とする函数 $z=f(x,y)$ は C^1 級であるとせよ. また, 点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれるとせよ. このとき,

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$$

かつ $0<\theta<1$ なる θ が存在する. これを 2 変数の平均値の定理 と呼ぶ.

問 26.7 (26.5) の $n=2$ の場合と $n=3$ の場合を (26.3) を使って自身で書き下せ.

26.2. 極大, 極小

注意 26.8 Taylor の定理 26.4 を $n=2$ の場合に書き下せば

$$f(a+h,b+k)=\underline{\underline{f(a,b)}}+\frac{1}{1!}\big(f_x(a,b)h+f_y(a,b)k\big)$$
$$+\frac{1}{2!}\big(f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)\,h^2+2f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)\,hk+f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)\,k^2\big)$$

となる. ここで, の部分 (1 次部分), の部分 (2 次部分) の 2 つの部分が $f(x,y)$ の極値を判定するのに重要である (次 page 以降で述べる).
ちなみに, 2 重下線部分は 0 次部分と呼ぶべきものである.

定義 26.9 2 変数の場合でも, 函数 $f(x,y)$ について, ある点での値がその点の近傍 (その点からある小さい正の距離未満の範囲) で, 最大 (あるいは最小) であるとき, その点で 極大値 (あるいは 極小値) を持つとか, 極大である (あるいは 極小である) といはれる.

2 変数函数の極値 を調べる方法を述べる.

補題 26.10 A, B, C は定数とし, $D=B^2-AC$ とおく. 実数 h, k の函数

$$G(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

を考へる. 以下 $(h,k)\neq(0,0)$ とする. このとき, 次が成り立つ.
(1a) $D<0$, $A>0$ (または $D<0$, $C>0$) のとき, G は h, k の値によらず正である.
(1b) $D<0$, $A<0$ (または $D<0$, $C<0$) のとき, G は h, k の値によらず負である.
(2) $D>0$ のとき, G は h, k の値により正にも負にもなり得る.

証明 (1a) のとき $A>0$ ならば h に関して平方完成すれば,

$$G(h,k)=A\Big(h+\frac{B}{A}k\Big)^2+\frac{AC-B^2}{A}k^2>0$$

である. $C>0$ のときは k に関して平方完成すればよい. (1b) も同様.
(2) $D>0$ より A, B, C のいづれかは 0 でない. $A\neq0$ のとき, 上記の第 1 項と第 2 項の符号が異なるので, $h+\frac{B}{A}k=0$ の場合と $k=0$ の場合の (h,k) により G は正にも負にもなり得る. $C\neq0$ の場合は, $G(h,k)$ を k について平方完成させて同様に示される. $A=C=0$ の場合は項 $2Bhk$ しかないが, これは正にも負にもなり得る. □

定理 26.11　領域 U で定義された函数 $z = f(x,y)$ が, すべての第 2 次偏導函数を持ち, それらは連続とする．点 $(a,b) \in U$ において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とし, 次の様におく：

$$A = f_{xx}(a,b),\ B = f_{xy}(a,b),\quad C = f_{yy}(a,b),\quad D = B^2 - AC.$$

このとき, 以下が成り立つ：

(1a) $D < 0$, $A > 0$ (または $D < 0$, $C > 0$) のとき f は (a,b) で極小となる. (図 26.12)

(1b) $D < 0$, $A < 0$ (または $D < 0$, $C < 0$) のとき f は (a,b) で極大となる. (図 26.13)

(2)　$D > 0$ のとき f は (a,b) で極大でも極小でもない．(図 26.14)

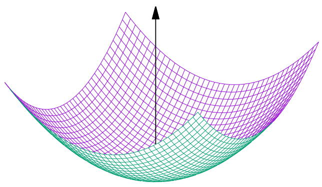


図 26.12　極小

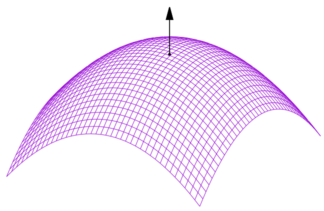


図 26.13　極大

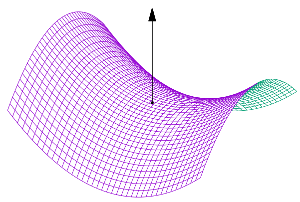


図 26.14　どちらでもない

証明　Taylor の定理から, 小さな h, k について,

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b) &= \tfrac{1}{2}(A'h^2 + 2B'hk + C'k^2), \\ A' &= f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k), \\ B' &= f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k), \\ C' &= f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

かつ $0 < \theta < 1$ なる θ が存在する．このとき, 第 2 次偏導函数がどれも連続であることから, $|h|$ と $|k|$ が十分小さければ, $B'^2 - A'C'$ ($= D'$ とおく), A', C' の符号は, それぞれ, D, A, C の符号に一致する．

(1a) $A > 0$ の場合, $|h|$ と $|k|$ が十分小さいければ, $D' < 0$, $A' > 0$ なので, 26.10 より $f(a+h,b+k)$ は $(h,k) = (0,0)$ で極大となる．即ち $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極大となる．$C > 0$ の場合についても同様に示される．

(1b) と (2) も同様に証明される．　□

注意 26.15　(1) 26.11 の (2) の場合において, 点 $(a,b,f(a,b))$ は, 曲面 $z = f(x,y)$ の <u>鞍点</u> (saddle point) であるといはれる．

(2) $D = 0$ のときは, Taylor の定理で 3 次以上の項を調べるなどしないと極値であるか否かを判定できない．

注意 26.16 ほとんどの教科書では D の代りに

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix}_{(x,y)=(a,b)} = AC - B^2$$

を D としている (Hesse 行列式と呼ばれる) ので注意されたい.

例題 26.17 $c > 0$ を定数とする. $z = f(x,y) = x^3 - 3cxy + y^3$ の極値を調べよ.

解答 偏導函数は

$$z_x = 3(x^2 - cy), \quad z_y = 3(y^2 - cx).$$

$z_x = z_y = 0$ を解くと $(x,y) = (0,0), (c,c)$.

$$z_{xx} = 6x, \ \ z_{xy} = -3c, \ \ z_{yy} = 6y$$

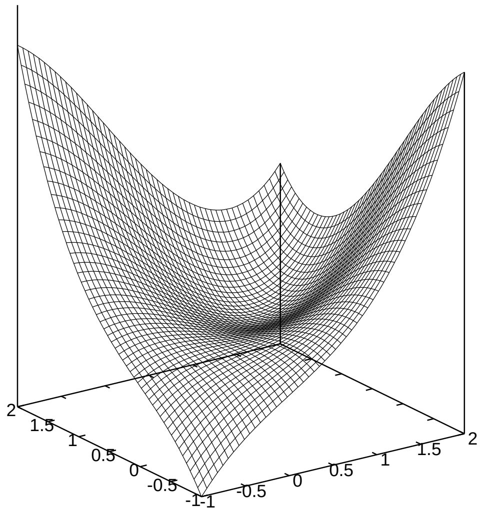
より $D(x,y) = 9(c^2 - 4xy)$.
(i) $(x,y) = (0,0)$ のとき

$$D = 9c^2 > 0$$

より, 極値を取らない.
(ii) $(x,y) = (c,c)$ のとき

$$D = -27c^2 < 0, \ \ A = f_{xx}(0,0) = 6c > 0$$

より, 極小となる. 極小値は $-c^3$. □



例題 26.18 函数 $f(x,y) = y^2 - x^3$ の極値を求めよ.

解答 偏導函数は

$$z_x = 3x^2, \quad z_y = 2y.$$

$z_x = z_y = 0$ を解くと $(x,y) = (0,0)$.

$$z_{xx} = 6x, \ \ z_{xy} = 0, \ \ z_{yy} = 2$$

より $D(x,y) = -12x$, $D(0,0) = 0$. 従つて, これだけでは判定できない. しかるに $f(x,0) = x^3$ は極値を持たないので, 点 $(0,0)$ は極値ではない. □

演 習 問 題

26.19 $z = f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3 - 2x - 3y$ について, 次の問に答えよ.

(1) z_x, z_y を求めよ.
(2) $\{(x, y) \mid y > 0\}$ の範囲で $z_x = z_y = 0$ の解は唯一つしかない. その解を求めよ. 以後, その解を $(x, y) = (a, b)$ と記す.
(3) $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$ $(= f_{yx}(a, b))$, $C = f_{yy}(a, b)$ を求めよ.
(4) 上の A, B, C の値に基き, 函数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) で極値となるかどうか判定せよ.

26.20 次の函数の極値をすべて求めよ. $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ の解を全て記し, その中で極値を与えるものについては, 極大値なのか極小値なのかを記し, その極値も記せ.

(1) $f(x, y) = x^2 - 5xy - 2y^2$.
(2) $f(x, y) = 3x^2 - 5xy + 3y^2 - x - y$.
(3) $f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 4x - 2y$.
(4) $f(x, y) = 3xy - x^{-1} + 9y^{-1}$.
(5) $f(x, y) = x^3 - xy + \frac{1}{2}y^2$.
(6) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$. 〔= [2], p.98, 例題 4.3.2〕

26.3. 陰函数の定理

定義 26.21 区間 I で定義された函数 $y=\varphi(x)$ に対して, これの graph Γ_f を含む領域 D 上の函数 $f(x,y)$ が存在して, 任意の $x\in I$ について $f(x,\varphi(x))=0$ となるとき, $\varphi(x)$ を $f(x,y)=0$ で定義される陰函数と呼ぶ.

例 26.22 陰函数の例を挙げる :
(1) $y=\sqrt{1-x^2}$ は $x^2+y^2-1=0$ で定義される陰函数（の 1 つ）である.
(2) $y=\sqrt{x^3-3x-1}$ は $y^2-x^3+3x+1=0$ で定義される陰函数（の 1 つ）である.

定理 26.23* （陰函数の定理）函数 $z=f(x,y)$ は領域 D で定義された C^1 級函数とする. $(a,b)\in D$ において $f(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)\neq 0$ ならば a を含む開区間で定義された $f(x,y)$ の陰函数 $y=\varphi(x)$ で $b=\varphi(a)$ となるものが存在する. しかも, この函数は微分可能で, 次式が成り立つ :

$$\varphi'(x)\Big(=\frac{dy}{dx}\Big)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}. \tag{26.24}$$

証明 3 つの段階に分けて説明する [33].
Step 1. 陰函数の存在の証明する. まづ $f_y(a,b)>0$ の場合を証明する. このとき, f が C^1 級であることから, $|x-a|<\varepsilon$ かつ $|y-b|<\varepsilon$ ならば $f_y(x,y)>0$ である. ゆゑに $|x-a|<\varepsilon$ なる x を固定するとき, 函数 $y\mapsto f_y(x,y)$ は b の近傍で正である. よつて, 函数 $y\mapsto f(x,y)$ は b の近傍で狭義単調増加である. 特に, $\varepsilon>0$ が存在して区間 $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ において $y\mapsto f(a,y)$ は狭義単調増加である. しかるに $f(a,b)=0$ なので

$$b-\varepsilon<y_1<b<y_2<b+\varepsilon$$

なる y_1, y_2 については $f(a,y_1)<0$ かつ $f(a,y_2)>0$ である. ここで再び f が C^1 級函数であることを使へば, $\delta>0$ が存在して

$$|x-a|<\delta \implies f(x,y_1)<0,\ f(x,y_2)>0$$

となることがわかる. 今, 再び $|x'-a|<\delta$ なる x' を固定して函数

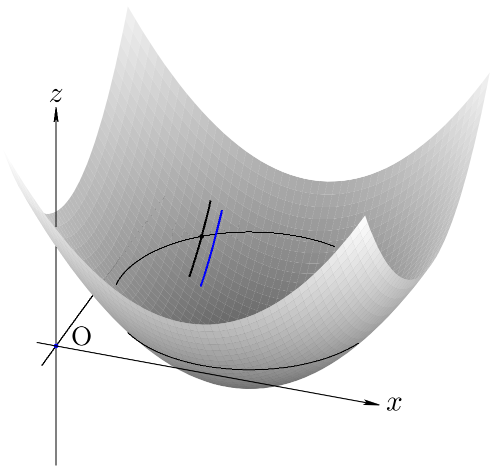
$$[y_1,y_2]\ni y\mapsto f(x',y)$$

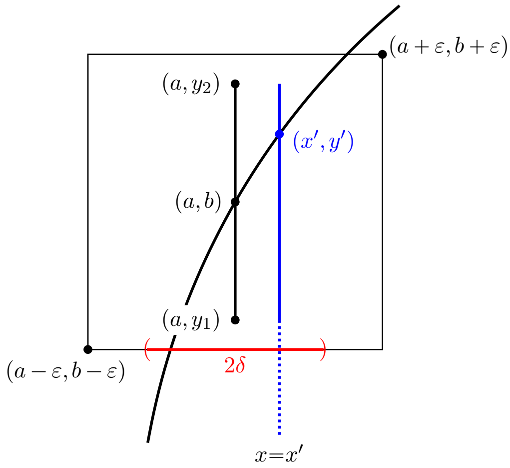
を考へる. 中間値の定理と単調増加性から $f(x',y')=0$ なる $y'\in[y_1,y_2]$ が唯一つだけ存在する. 以上で, 函数

$$[a-\delta,a+\delta]\ni x'\longmapsto y'$$

が得られたが, 当然 $x'=a$ については $y'=b$ であるので, これは $f(x,y)=0$ の (a,b) の近傍における陰函数に他ならない. 以後これを $x\mapsto\varphi(x)$ と記す.

[33] [2], pp.100–101 の証明.





Step 2. 陰函数が連続であること．上で得られた区間を $I = [a-\delta, a+\delta]$ と記す．$x \in I$ のとき $\varphi(a)$, $\varphi(x)$ は $[y_1, y_2]$ に属すので,

$$|\,\varphi(x) - \varphi(a)\,| < |y_2 - y_1|.$$

これは y_1, y_2 が（上で述べた通りであれば）どの様に選ばれても（y_1 と y_2 がどれだけ近くても）, 上の推論から, $\delta > 0$ が存在して, $|x-a| < \delta$ ならば成り立つ.

Step 3. $x \in I$ を固定し，この点における $\varphi(x)$ の微分係数を求める．x の増分を $\Delta x\,(\neq 0)$ とし, $y = \varphi(x)$, $\Delta y = \varphi(x+\Delta x) - y$ ならば,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x+\Delta x, \varphi(x+\Delta x)) = 0,$$
$$f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = 0$$

であり, しかも 26.6 により, $0 < \theta < 1$ なる θ が存在して,

$$f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) = f(x, y) + f_x(x+\theta\Delta x,\, y+\theta\Delta y)\Delta y + f_y(x+\theta\Delta x,\, y+\theta\Delta y)\Delta y$$

であるから,

$$f_x(x+\theta\Delta x,\, y+\theta\Delta y)\Delta y + f_y(x+\theta\Delta x,\, y+\theta\Delta y)\Delta y = 0.$$

ここで Δx が十分小さければ $f_y(x+\theta\Delta x,\, y+\theta\Delta y) \neq 0$ なので

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f_x(x+\theta\Delta x,\, y+\theta\Delta y)}{f_y(x+\theta\Delta x,\, y+\theta\Delta y)}.$$

最後に $\Delta x \to 0$ とすれば, 所望の等式が得られる. □

当面, この証明に拘る必要はないし, 式 (26.24) を覚える必要もない．まづは, 上の状況で, $y = \varphi(x)$ が x の函数として微分可能だから, $f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = 0$ の両辺を 24.26 を用ゐて x で微分すると $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$ から $\dfrac{dy}{dx}$ が求まるといふ計算方法を会得されたい．次の例題を参考にされたい.

例題 26.25 (陰函数の定理を利用した接線の求め方) 次の方程式によって定まる陰函数の graph について, 点 $(x, y) = (1, 0)$ における接線の方程式を求めよ:

$$x^3 - 2xy + y^3 - x - y = 0.$$

解答 等式 $x^3 - 2xy + y^3 - x - y = 0$ の両辺を x で微分すると

$$3x^2 - 2(y + xy') + 3y^2 y' - 1 - y' = 0.$$

$$\therefore\ (-2x + 3y^2 - 1)y' = -3x^2 + 2y + 1.$$

$$\therefore\ y' = \frac{-3x^2 + 2y + 1}{-2x + 3y^2 - 1}.$$

である. $(x, y) = (1, 0)$ を代入すると

$$y'\big|_{(x,y)=(1,0)} = \frac{-3+1}{-2-1} = \frac{2}{3}.$$

(これが接線の傾き)

よつて, 求める接線は, 点 $(1, 0)$ を通る傾き $\frac{2}{3}$ の直線である. その方程式は

$$y = \frac{2}{3}(x-1) \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$

となる. □

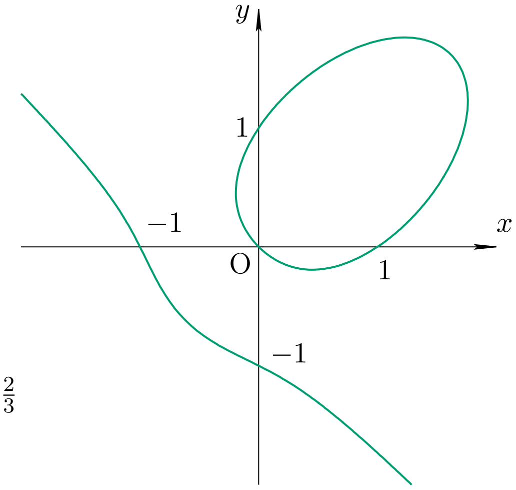
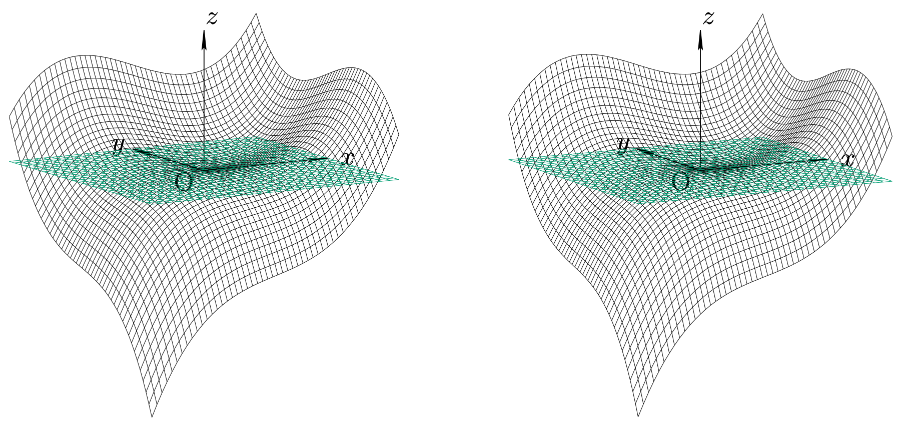


図 26.26 陰函数の graph



$z = x^3 - 2xy + y^3 - x - y$ の表す曲面 (立体視)

上記の曲面と xy 平面との共有点は図 26.26 の様な曲線になっている.

演習問題

26.27 $2x^2 + xy - y^2 - x + y + 2 = 0$ で陰函数表示された函数の graph の点 $(1, 3)$ における接線の方程式を求めよ.

§ 27.　Lagrange の未定乗数法

極値問題の解法を理解する. 基礎的な函数の極大値, 極小値を学ぶ.

定理 27.1 (Lagrange の未定乗数法). 点 (x,y) は曲線 $\varphi(x,y)=0$ 上を動くとし, その曲線上に限れば $f(x,y)$ は, 点 (a,b) で極大または極小になるとする. いま, $\varphi_x(a,b)\neq 0$ または $\varphi_y(a,b)\neq 0$ であるとする. λ を定数として,

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

とおく. このとき

$$\begin{cases} F_x(a,b,\lambda)=0, \\ F_y(a,b,\lambda)=0 \end{cases} \quad \text{即ち} \quad \begin{cases} f_x(a,b)-\lambda\,\varphi_x(a,b)=0, \\ f_y(a,b)-\lambda\,\varphi_y(a,b)=0 \end{cases} \tag{27.2}$$

を同時に満たす λ が存在する.

Lagrange の未定乗数法は, 極値を持つ点を絞り込むための方法で, 応用範囲が非常に広い. (但し, それが実際に極大値または極小値を持つかどうか判定するのは面倒なことが多い.)
次がその一例である (この種の問題は, 大学の入試問題としても出題される).

例題 27.3　条件 $x^2+y^2=1$ のもとで $x+2y$ の最大値と最小値を求めよ.

解答　$\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$, $f(x,y)=x+2y$ として, 27.1 を利用する. 点 (a,b) で極値をもつとすれば, $\varphi(a,b)=0$ と (27.2) より

$$\begin{cases} a^2+b^2-1=0, \\ \quad 1-2\lambda a=0, \\ \quad 2-2\lambda b=0 \end{cases}$$

となる. これを解いて,

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\quad\text{(複号同順)}$$

これらの点では $x+2y=\pm\sqrt{5}$. $\varphi(x,y)=0$ を満たす点の全体は円 (有界な閉集合) であるから, 最大値と最小値を持つ. よつて, これらの点における $f(a,b)$ の値を比較することにより,

$$(x,y)=\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}},\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\ \text{で最大値}\ \sqrt{5},$$
$$(x,y)=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}},-\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\ \text{で最小値}\ -\sqrt{5}$$

をとることがわかる.

《高校までの解法》 $k=x+2y$ とおいて, 条件から x を消去すると

$$(k-2y)^2+y^2=1.\quad\therefore\ 5y^2-4ky+k^2-1=0.$$

これが実数解を持つ条件は, 判別式 D が

$$D/4=4k^2-5(k^2-1)=-k^2+5\geqslant 0$$

であること. つまり $-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$. よつて, 最大値は $\sqrt{5}$ で, 最小値は $-\sqrt{5}$. □

例題 27.4 条件 $x^2+2y^2-1=0$ のもとで $4xy$ の最大値と最小値を求めよ.

解答 $\varphi(x,y)=x^2+2y^2-1,\ f(x,y)=4xy$
として (27.2) を利用する. 点 (a,b) で極値をもつとすれば, $\varphi(a,b)=0$ と (27.2) より

$$\begin{cases} a^2+2b^2-1=0, \\ 4b-\lambda\cdot 2a=0, \\ 4a-\lambda\cdot 4b=0. \end{cases}$$

これを解くと $(a,b,\lambda)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{1}{2},\sqrt{2})$ または $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{1}{2},-\sqrt{2})$ （複号同順）を得る.
$\varphi(x,y)=0$ は xy 平面上の楕円（有界な閉集合）を表すから, $f(x,y)=4xy$ は必ず最大値と最小値を持つ. ゆえに, これらの点における $f(a,b)$ の値を比較して,

$(x,y,\lambda)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \sqrt{2})$（複号同順） のとき $4xy=\sqrt{2}$ で最大,

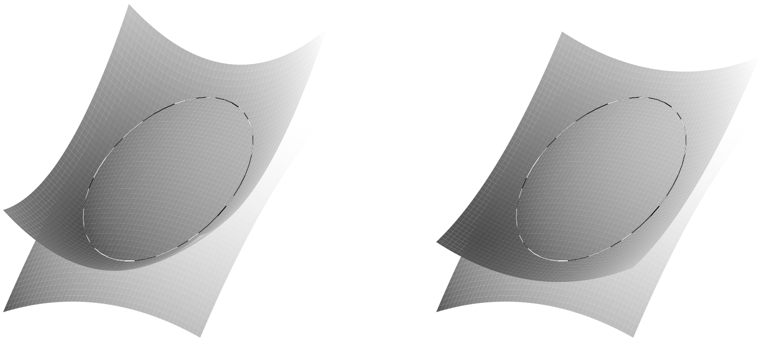
$(x,y,\lambda)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\frac{1}{2},\ -\sqrt{2})$（複号同順） のとき $4xy=-\sqrt{2}$ で最小

であることがわかる. □

Lagrange の未定乗数法が成り立つ理由の直観的な説明. 27.1 の証明は, 後に述べることにして, 直観的な説明を述べる. 下の左右の図では, 2 枚の曲面が重なつてゐる. 下側に描かれた上に凸な曲面は $z = f(x,y)$ の graph である. もう一つの凹んだ曲面（S と名付ける）は

$$z = F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$$

の graph である. 2 つの曲面 $\varphi(x,y) = 0$（鉛直な筒状の曲面）と $z = f(x,y)$（$f(x,y)$ の graph ）の共有点は, xyz 空間の曲線を描く. その曲線を C と呼ぶこととする. 図の中央部に見える楕円形の曲線が C に他ならない.



中央の楕円形の曲線が C である. 上に凸な曲面が $z = f(x,y) = F(x,y,0)$ を表し, 下に凸な曲面が異なる λ での $z = F(x,y,\lambda)$ を表してゐる.

いま, roller coaster に乗つて C 上を動いてゐる状態を想像していただきたい. これが, 水平になる場所 $\mathrm{P}(a,b)$ を見付ければ, それが極値をとる点の候補である. 左右では λ の値が異なるから, 曲面 S の“反り具合”が異なる. しかし, どちらも, 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点で $\varphi(x,y) = 0$ を満たす点が形づくる曲線 C を含む. λ の値が変化すると曲面 $z = F(x,y,\lambda)$ の反り具合が変化するが, ある λ においては, C の最も低いところ P（と最も高いところ [34]）では, S は水平な接平面を持つことが想像できる. このとき

$$F_x(a,b,\lambda) = 0, \quad F_y(a,b,\lambda) = 0 \tag{27.5}$$

が成り立つ. 一方, それ以外の C の点では, いかなる λ においても, S は決して水平な接平面を持ち得ない.

　別の説明をしやう. C 上の 1 つの点を採り, λ を変化させるとき, その点の付近での S の動きを見ると, S は C を軸に回転する様な動きをする. 回転といつても, C は曲線なので, S はあたかも繊維生地の様なものだと想定されたい. ここで P における S の接平面を考えると, P においては, C の接線は水平だから, S は一瞬だけ, P で水平な接平面を持つ状態になる. そのとき, (27.5) の 2 式が同時に成り立つ. 従つて (27.2) が成り立つ. 一方, さうでない（つまり, 水平な接線を持たない）点においては, λ をどう変化させても, その様なことは起らない！

[34] λ の値によつては, S が逆の反りを持つ様になるから.

証明（27.1 Lagrange の未定乗数法の） まず, $\varphi_y(a,b)\neq 0$ の場合に示す. 陰函数の定理から $\varphi(x,y)=0$ が定める x と y の関係, 即ち, 函数 $y=g(x)$ が $x=a$ の付近で存在し, $b=g(a)$ である. つまり, $z=\varphi(x,y)$ と $y=g(x)$ の合成函数（x には x を代入）を考へるとそれは恒等的に 0 である. このとき, 合成函数の微分 1（第 12 回）を使へば

$$\varphi_x(x,g(x))\frac{dx}{dx}+\varphi_y(x,g(x))\frac{dy}{dx}=0.$$

ゆえに（$\varphi_y(a,b)\neq 0$ も考慮して）

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x(x,g(x))}{\varphi_y(x,g(x))},\qquad g'(a)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(a,b)}=-\frac{\varphi_x(a,b)}{\varphi_y(a,b)}. \tag{27.6}$$

ここで, x の函数 $f(x,g(x))$ についても合成函数の微分法 1 を使ふと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x,g(x))&=f_x(x,g(x))\frac{dx}{dx}+f_y(x,g(x))\frac{dy}{dx}\\&=f_x(x,g(x))-\frac{\varphi_x(x,g(x))}{\varphi_y(x,g(x))}f_y(x,g(x))\quad(\because\ (27.6)\text{ 左の式}).\end{aligned}$$

一方, 仮定より, x の函数 $f(x,g(x))$ は $x=a$ で極値をとるから, その $x=a$ における微分係数は 0 である. 即ち, $\frac{d}{dx}f(x,g(x))|_{x=a}=0$. 従つて（すぐ上の式で $x=a$ として）,

$$\begin{aligned}0&=f_x(a,b)-\frac{\varphi_x(a,b)}{\varphi_y(a,b)}f_y(a,b)\\&=f_x(a,b)-\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}\varphi_x(a,b).\end{aligned} \tag{27.7}$$

ここで

$$\lambda=\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}\quad\text{即ち}\quad f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0 \tag{27.8}$$

とおくと, (27.7) と (27.8)（右の式）は求める式 (27.2) に他ならない.
$\varphi_x(a,b)\neq 0$ の場合は x と y の役割を入れ替へれば, 全く同様に示されるので, 省略する. □

演 習 問 題

27.9 次の問に答へよ.

(1) 条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のもとで $f(x,y)=xy$ の最大値, 最小値を求めよ.

(2) 条件 $\varphi(x,y)=x^2+2y^2-1=0$ のもとで $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ の最大値, 最小値を求めよ.

第 5 章　積分法

§ 28.　原始函数, 部分積分法, 置換積分法

28.1.　原始函数

定義 28.1（原始函数, 被積分函数）函数 $f(x)$ に対し,

$$F'(x) = f(x)$$

となる函数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始函数あるいは単に積分と呼び

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

と書く．簡単に, $f(x)$ の積分は $F(x)$ である, ともいふ．このとき $f(x)$ はこの積分の被積分函数と呼ばれる．原始函数を持つ函数は積分可能であるといはれる．

命題 28.2 与へられた函数 $f(x)$ の原始函数に任意の定数を加へた函数も $f(x)$ の原始函数である．また, 与へられた函数 $f(x)$ の任意の 2 つの原始函数の差は定数函数である．即ち, $F(x)$ を $f(x)$ の任意の原始函数とすれば, $f(x)$ の原始函数の集合は, 任意定数 C により

$$F(x) + C$$

と表される函数から成る．

証明 $F(x)$ を $f(x)$ の原始函数, C を定数とせよ．このとき（7.8 より）

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

となるから前半が示された．次に, $F(x)$ と $F_1(x)$ を $f(x)$ の 2 つの原始函数とすれば,

$$F'(x) = {F_1}'(x) = f(x).$$

$$\therefore\ \bigl(F(x) - F_1(x)\bigr)' = F'(x) - {F_1}'(x) = 0.$$

ここで, 最初の等号はもちろん 7.9(1), (2) からわかる．一方, 微分して 0 になる函数は定数函数だけであつた（定理 8.15 (3)）から,

$$F(x) - F_1(x) = C \quad (C \text{ は定数})$$

と書ける．よつて主張が示された． □

上のことから, 通常は適当な 1 つの原始函数 $F(x)$ を選んで,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

と書く．この様なとき, C を積分定数と呼ぶことが多い．

原始函数の定義により, 微分法の公式から原始函数を得る公式が得られる. それらを次 page の表 28.8 にまとめておく. この教科書をすべて理解したあとでの閲覧の便宜のため, 先の方で説明するものもここに記載しておく.

積分の線形性, 線形性の応用.

命題 28.3 (積分の線形性) 原始函数を持つやうな函数 $f(x)$, $g(x)$ と任意の定数 k について, 次の 2 つの等式が成り立つ. 但し, この等式は両辺が定数の差を除いて等しいことを意味する.

(1) $\displaystyle\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

証明 それぞれ, 両辺を微分して等しいことを確かめよ. その際, 7.9 (1), (2) を使ふ. □

命題 28.4 $f(x)$ の原始函数の 1 つを $F(x)$ とする. $a \neq 0$ のとき,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

証明 合成函数の微分法 9.1 により,

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b) = F'(ax+b)\,a = a\,f(ax+b).$$

$a \neq 0$ だから, 28.3 (2) により, 与式を得る. □

$f(ax^2+bx+c)$ については, 28.4 の様な方法は使へない. つまり, 次の問の通りである.

問 28.5 次の積分の等式が誤りである理由 (左辺 $\neq$ 右辺であることの説明) を述べよ.

(1) $\displaystyle\int \sin(x^2+3x)\,dx = \frac{-1}{2x+3}\cos(x^2+3x)+C.$

(2) $\displaystyle\int e^{x^2+3x}\,dx = \frac{1}{2x+3}e^{x^2+3x}+C.$

例題 28.6 積分 $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ を計算せよ.

解答 半角の公式 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x+1)$ を使つて 2 次式を 1 次式にすれば,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x+1)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right)+C = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$$

と計算できる. □

注意 28.7 数学の至るところで, 計算の際に次数を下げることが重要である. 次数を下げることを意識下におくと理解しやすいと思はれることが何ヶ所かある. その都度, 注意を喚起するつもりである.

表 28.8 基本函数の原始函数（積分定数は省略）

$\backslash$	被積分函数 $f(x)$	原始函数 $\displaystyle\int f(x)\,dx$	備考
1	$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}\ x^{\alpha+1}$	10.5
2	x^{-1}	$\log\lvert x\rvert$	10.2
3	$\sin x$	$-\cos x$	(11.2)
4	$\cos x$	$\sin x$	(11.3)
5	$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	
6	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\log\lvert\sin x\rvert$	
7	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	(11.4)
8	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\dfrac{-1}{\tan x}$	11.8(3)
9	e^x	e^x	10.3
10	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x\ (=\arcsin x)$	(11.13)
11	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x\ (=\arccos x)$	(11.14)
12	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x\ (=\arctan x)$	(11.15)
13	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+A}}$	$\log\left\lvert\sqrt{x^2+A}+x\right\rvert, \quad -\log\left\lvert\sqrt{x^2+A}-x\right\rvert$	29.34 で説明
14	$\sqrt{x^2+A}$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left\lvert\sqrt{x^2+A}+x\right\rvert\right)$, $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}-A\log\left\lvert\sqrt{x^2+A}-x\right\rvert\right)$	29.37 で説明
15	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}-a^2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)$	29.40 で説明, 29.42(2) 参照
16	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\log\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert$	29.12 で説明
17	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\log\left\lvert\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right\rvert, \ \log\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	28.29 で説明
18	有理函数	必ず初等函数 (29.1(2) で説明) で記述される	29.2 で説明

双曲線函数（§ 12）に関しては省略するが, この表の 13, 14 は双曲線函数と関係が深い. 例へば (12.2) と比較されたい.

問 **28.9** 次の等式を証明せよ（= 5.8. Hint : 逆三角函数の定義を思ひ出せ.):

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

公式集 (28.8) の 10 と 11 の結果の関係を上の式から納得しておくとよい.

演 習 問 題

28.10 次の積分を求めよ. 積分定数には C を用ゐよ.

(1) $\displaystyle\int (x^7 + 3x^2 + 5)\, dx$. 〔≒2.1 A1(1)〕

(2) $\displaystyle\int \sin(7x)\, dx$. 〔≒2.1 A1(4)〕

(3) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x}}\, dx$. 〔= 2.1 A1(8)〕

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}}\, dx$.

28.11 次の函数の原始函数を求めよ. 積分定数には C を用ゐよ.

(1) $x^3 + 2x^2 - 1$. 〔= 2.1 A1(1)〕

(2) $(3x-2)^3 + 2(3x-2)^2 - 1$.

(3) $\displaystyle\frac{1}{3x-2} + \frac{1}{(3x-2)^2}$. 〔≒2.1 A1(3)〕

(4) $\sin(3x-2)$. 〔≒2.1 A2(4)〕

(5) e^{3x-2}. 〔≒2.1 A2(1)(2)〕

(6) $(e^{2x} - e^{-2x})^2$. 〔= 2.1 A1(3)〕

(7) $\sin^2 x$.

(8) $\sin^2(3x+1)$.

(9) $\cos^3 x$. (Hint: 3 倍角の公式. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を使ふ方法は後述する置換積分が必要)

(10) $\displaystyle\frac{1}{1+4x^2}$. 〔≒2.1 A3(1)(2)(3)〕

(11) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$.

28.2. 部分積分法

定理 28.12 （部分積分法） $F(x)$ が函数 $f(x)$ の原始函数の 1 つであるとき,

$$\int \underset{\text{セ}}{f(x)}\,\underset{\text{ビ}}{g(x)}\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx.$$

証明 $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ と $g(x)$ について, 積の微分法 7.9(3) から,

$$(F(x)g(x))' = f(x)g(x) + F(x)g'(x),$$
$$\therefore\ f(x)g(x) = (F(x)g(x))' - F(x)g'(x).$$

この両辺を積分すれば,

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

となり, 成り立つ. □

注意 28.13 部分積分法で積分ができるか否かを見分ける骨（コツ）は, 与式を 2 つの函数の積に見立てて seesaw を思ひ浮べ,

$$(\text{与式}) = \int \underset{\text{セ}}{f(x)}\,\underset{\text{ビ}}{g(x)}\,dx$$

から一方を積分, 他方を微分した

$$\int F(x)\,g'(x)\,dx$$

が積分できるかどうかを見極めることである.

例題 28.14 次の積分を計算せよ.

$$\int \log x\,dx.$$

解答 部分積分法により

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \underset{\text{セ}}{1}\cdot \underset{\text{ビ}}{\log}\,x\,dx \\
&= x\log x - \int x(\log x)'dx \\
&= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\log x - \int 1\,dx \\
&= x\log x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

となる. □

例題 28.15 次の積分を求めよ：

$$\int x\cos x\,dx.$$

解答 部分積分法により

$$\int \underset{ビ}{x}\,\underset{セ}{\cos x}\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C \quad \cdots\cdots \text{ Ans.}$$

となる. □

次の様なやや異質な使ひ方もある.

例題 28.16 次の積分を求めよ：

$$\int e^x \sin x\,dx.$$

解答 部分積分を 2 回行ふと,

$$\begin{aligned}\int \underset{セ}{e^x}\,\underset{ビ}{\sin x}\,dx &= e^x\sin x - \int \underset{セ}{e^x}\,\underset{ビ}{\cos x}\,dx\\ &= e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right)\\ &= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx.\end{aligned}$$

よつて

$$2\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + C.$$

$$\therefore \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}\big(e^x\sin x - e^x\cos x\big) + C \quad \cdots\cdots \text{ Ans.}$$

となる. □

演 習 問 題

28.17 次の積分を部分積分法を用いて求めよ.

(1) $\int xe^x\,dx.$ 〔≒2.1 A4(3)〕

(2) $\int x^2e^x\,dx.$

(3) $\int x\sin x\,dx.$ 〔=2.1 A4(6)〕

(4) $\int (x+2)\cos x\,dx.$ 〔≒2.1 A4(5)〕

(5) $\int x^2\cos x\,dx.$

(6) $\int \log(2x+1)\,dx.$

(7) $\int x\log x\,dx.$ 〔=2.1 A4(1)〕

(8) $\int e^x\cos x\,dx.$ 〔=2.1 A5(4)〕

(9) $\int e^{-x}\sin 2x\,dx.$ 〔=2.1 A5(5)〕

28.3. 置換積分法

合成函数の微分法 を積分に焼き直すことで得られるのが, 置換積分法 である.

定理 28.18 （置換積分法）$f(u)$ を区間 I で定義された連続な函数とする. さらに $\varphi(x)$ を区間 J で定義されて, その値域が I に含まれる微分可能な函数とする. このとき $u=\varphi(x)$ といふ関係の元で,

$$\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

が成り立つ.

証明 $F(u)$ を $f(u)$ の原始函数とせよ. 即ち, $f(u)=F'(u)$ である. このとき, 合成函数の微分法（定理 8.19.1）により

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(u)\frac{du}{dx}$$

であり, $F(u)=\displaystyle\int f(u)du$ なので,

$$\int f(u)du = F(u) = F(\varphi(x)) = \int F'(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\frac{du}{dx}\,dx$$

となつて所望の式が得られた. □

この定理には, 2 つの使ひ方があると考へるのがよい.

使用法 1 もし $x=\varphi(t)$ とおいて, t の簡単な式になりさうなら,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\,dt \tag{28.19}$$

の様に（28.18 の左辺から右辺へ）変形する.

使用法 2 もし x のある式を u とおくことで, 被積分函数が $f(u)\dfrac{du}{dx}$ と書けることに気付いたなら, 次の様に（28.18 の右辺から左辺へ）変形する:

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)du. \tag{28.20}$$

例 28.21 積分

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx.$$

を $x=\tan t$ と置換して求めてみる:

$$\int \frac{1}{\tan^2 t+1}\frac{dx}{dt}\,dt = \int \frac{1}{\tan^2 t+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int dt = t + C = \tan^{-1}x + C$$

となる. これは使用法 1 (28.19) である.

例題 28.22 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

解答 $u = x^2+1$ とおくと, $\frac{du}{dx} = 2x$ であるから,

$$(\text{与式}) = \int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + C = \log(x^2+1) + C.$$

これは, 使用法 2 (28.20) である. □

例題 28.23 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx.$$

解答 解 1. 以下のうち囲みにした積分の計算で 方法 2 (28.20) を 1 回使つてゐる：

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \boxed{\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx} = \frac{-1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x} + C = \frac{-\cos x + 1}{\sin x} + C \\ &= \frac{1-\cos x^2}{\sin x\,(1+\cos x)} + C = \frac{\sin x}{1+\cos x} + C \quad \cdots\cdots\ (\text{答 } 1)\,.\end{aligned}$$

解 2. 以下の計算の理論的な背景を含めた詳細は第 29.5 節で説明するが, ここでも述べてみる. これはどちらかといへば (28.19) の使用法による. いま, $t = \tan\frac{x}{2}$ つまり $x = 2\tan^{-1} t$ とおくと,

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}2\tan^{-1} t = \frac{2}{1+t^2}$$

となるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int dt \\ &= t + C = \tan\frac{x}{2} + C \quad \cdots\cdots\ (\text{答 } 2)\end{aligned}$$

を得る. □

問 28.24 これら 2 つの結果（答 1）と（答 2）が一致することを直接に確認せよ.

ここで, 部分積分法, 置換積分法に対応する微分法の公式をまとめておく：

微分法	積分法
積の微分法	部分積分法
合成函数の微分法	置換積分法

これまでに説明したことの応用として以下の 28.25 及び 28.28 を述べておく.

例題 28.25 $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$I_n = I_n(x) = \int \cos^n x\,dx$$

とおく. これについて次の漸化式が成立することを示せ: 〔= 2.1 B2〕

$$(n+2)\,I_{n+2} = (n+1)I_n + \cos^{n+1}x\,\sin x. \tag{28.26}$$

注意 28.27 この公式は $n \in \mathbb{N}$ だけではなく $n \in \mathbb{Z}$ で成り立つことに注意.

解答 やや技巧的な変形を行ふ. $n \neq -1$ のとき,

$$\begin{aligned}
I_{n+2}(x) &= \int \cos^{n+2}x\,dx = \int (\cos^n x)(1-\sin^2 x)dx \\
&= \int \cos^n x\,dx - \int \cos^n x \sin^2 x\,dx \\
&= \int \cos^n x\,dx - \int (\cos^n x \sin x)\sin x\,dx \\
&= \int \cos^n x\,dx - \int \left(\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}x\right)' \sin x\,dx \\
&= \int \cos^n x\,dx + \frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x\,\sin x - \frac{1}{n+1}\int \cos^{n+1}x\cos x\,dx \\
&= I_n + \frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x\,\sin x - \frac{1}{n+1}I_{n+2}.
\end{aligned}$$

これにより (28.26) を得る. $n = -1$ のとき (28.26) は $I_1(x) = \sin x + C$ を意味するが, これは正しい. これで証明ができた. □

これを使つた計算の例を挙げておく.

例 28.28 $n \geqq 0$ のときは (28.26) を

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n + \frac{1}{n+2}\cos^{n+1}x\,\sin x$$

の形で使つて

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int dx = x, \quad I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x, \\
I_2 &= \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}\cos x\,\sin x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cos x\,\sin x, \\
I_3 &= \frac{2}{3}I_1 + \frac{1}{3}\cos^2 x\,\sin x = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\cos^2 x\,\sin x, \\
I_4 &= \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{4}\cos^3 x\,\sin x = \frac{3}{8}\cos x\,\sin x + \frac{1}{4}\cos^3 x\,\sin x + \frac{3}{8}x, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

といふ具合に順次得られる.

$n < 0$ の場合は, I_{-1} を計算した上で (28.26) を

$$I_n = \frac{n+2}{n+1}I_{n+2} - \frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x\,\sin x \quad (n \leqq -2)$$

の形で使へば（積分定数は省略する），

$$
\begin{aligned}
I_{-1} &= \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(-\log|1-\sin x| + \log|1+\sin x| \right) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \\
&= \frac{1}{2} \log \left| \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} \right| = \log \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right|, \\
I_{-2} &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x, \\
I_{-3} &= \frac{1}{2} I_{-1} - \frac{1}{-2} \cos^{-2} x \sin x = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| + \frac{1}{2} \cos^{-2} x \sin x, \\
I_{-4} &= \frac{2}{3} I_{-2} - \frac{1}{-3} \cos^{-3} x \sin x = \frac{2}{3} \tan x + \frac{1}{3} \cos^{-3} x \sin x, \\
I_{-5} &= \frac{3}{4} I_{-3} - \frac{1}{-4} \cos^{-4} x \sin x \\
&= \frac{3}{8} \log \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| + \frac{3}{8} \cos^{-2} x \sin x + \frac{1}{4} \cos^{-4} x \sin x, \\
& \cdots .
\end{aligned} \tag{28.29}
$$

注意 28.30 上と同様な計算が次の積分についてもできるが, 詳細は読者に任せる :

$$J_n = J_n(x) = \int \sin^n x \, dx.$$

演 習 問 題

28.31 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \tan x \, dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx.$ 〔≒ 2.1 A3(3)〕

(3) $\displaystyle\int 2x e^{x^2+1} dx.$ 〔≒ 2.2 A1(9)〕

(4) $\displaystyle\int 2x \cos(x^2+1) \, dx.$

(5) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

(6) $\displaystyle\int 2x \tan x^2 \, dx.$

28.32 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+3} dx.$ 〔≒ 2.2 A1(8)〕

(2) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}-3e^x}{e^{2x}-3e^x+1} dx.$

(3) $\displaystyle\int \log(x^2+1) \, dx.$ 〔= 2.2 A2(3)〕

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + 3} dx.$
（Hint : $t = \tan \frac{x}{2}$ と置換. ）

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1} dx.$ （Hint : 同上. ）

§ 29.　有理函数, 三角函数の有理函数, 無理函数の積分

29.1.　函数の分類

微分積分学に主に登場する函数の分類を再確認しておく.

定義 29.1　(再掲, = 5.20) 以下の様に函数を分類する.
(1) 2 つの多項式の商として表される函数を 有理函数 と呼ぶ.
(2) 有理函数, 冪乗根, 指数函数, 対数函数, 三角函数, 逆三角函数の有限回の和差積商および合成によつて表される函数を, 初等函数 と呼ぶ.
(3) 初等函数ではあるが, 有理函数, 冪乗根の有限回の和差積商および合成によつては表し得ない函数を, 初等超越函数 と呼ぶ.

微分積分学は, これらの函数を扱ふ理論であるともいへる.

29.2.　有理函数の積分 1

この節では有理函数の積分法を学ぶ. 基本的な方針は **次数下げ** である :
—. 分子については, 除法で次数下げ ;
—. 分母については, 部分分数分解 (部分分数展開) によつて次数下げ.

定理 29.2　有理函数の原始函数は初等函数で与へられる.

これの証明を述べると長くなるし, 実際の手順を理解すれば十分だと思はれるため, 一般論を述べないでいくつか例を使つて説明する.

例題 29.3　積分 $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-3x+2}\,dx$ を求めよ.

解答 1　始めに被積分函数を部分分数に分けてから, 割り算を実行すると

$$\begin{aligned}(\text{被積分函数}) &= \frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)} = (x^3+2)\Big(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\Big) \quad (\text{分母の次数下げ})\\ &= \Big(x^2+2x+4+\frac{10}{x-2}\Big)-\Big(x^2+x+1+\frac{3}{x-1}\Big) \quad (\text{分子の次数下げ})\\ &= x+3+\frac{10}{x-2}-\frac{3}{x-1}.\end{aligned}$$

よつて

$$(\text{与式}) = \frac{1}{2}x^2+3x+10\log|x-2|-3\log|x-1|+C$$

となる. □

解答 2　或いは, 先に割り算の計算を実行して

$$(\text{被積分函数}) = \frac{x^3+2}{x^2-3x+2} = x+3+\frac{7x-4}{x^2-3x+2} \quad (\text{分母の次数下げ}).$$

次に, 最後の項を部分分数分解をする :

$$\frac{7x-4}{x^2-3x+2} = \frac{7x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} \quad (A \text{ と } B \text{ は定数})$$

とおき, 分母を払つて $x=1$, $x=2$ を代入することで $A=-3$, $B=10$ を得る. あとは解答 1 と同様にできる. □

例題 29.4 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx.$$

解答 分母の次数を下げるために,

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

を満たす A, B, C を求める. 分母を払つて

$$1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1).$$

これに $x=0$, $x=1$, $x=2$ を代入すれば, (なぜ, これらを代入して良いのか説明せよ.)

$$1 = 2A,\quad 1 = -B,\quad 1 = 2C.$$

$$\therefore A = \frac{1}{2},\quad B = -1,\quad C = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-2)}.$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{2}\log|x| - \log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x-2| + C$$

となる. □

例題 29.5 次の積分を計算せよ.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx.$$

解答 被積分関数を部分分数に分けるため,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$$

とおいて A, B_1, B_2 を求めると $A=1$, $B_1=-1$, $B_2=1$ を得る. よつて

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \\ &= \log|x-1| - \log|x-2| - \frac{1}{x-2} + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

を得る. □

例題 29.6

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3}\,dx$$

解答 被積分函数について

$$\frac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C_1}{x-2} + \frac{C_2}{(x-2)^2} + \frac{C_3}{(x-2)^3}$$

を満たす $A, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3$ を求めることにより

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3}\\&= -\frac{1}{8x} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{17}{8}\frac{1}{x-2} - \frac{5}{4}\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-2)^3}\end{aligned}$$

を得る．よつて

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3}\,dx\\&= -\frac{1}{8}\log|x| - 2\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{17}{8}\log|x-2| + \frac{5}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-2)^2} + C\end{aligned}$$

となる． □

注意 29.7 29.2 の逆, つまり原始函数が初等函数の有限個の“組合せ”で書けるか否かについての被積分函数に対する 1 つの判定法が Liouville（リューヴィユ） の定理 として知られてゐる（証明は難しい）．ここでは詳しく述べられない．

演 習 問 題

29.8 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x+1}\,dx.$ 〔≒2.1 A1(5)〕

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x-2}\,dx.$ 〔≒2.1 A1(5)〕

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{(x+1)(x-2)}\,dx.$ （Hint：(1), (2) を利用してよい．）

(4) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{(x+1)^2}\,dx.$

29.3. 本章の内容を俯瞰

ここで, 気持ちが楽になる様に, 本章の内容をまとめておく.

積分の計算の大きな目的は, 曲線の長さや, 曲つた図形の面積, 立体の体積などの値を求めることではあるが, 原始的な測量の様な方法を使ふ訳ではない. 特筆すべきことは, 計算の途中が極めて“代数的”にできることであつて, そのお陰で, 完全に正確な値が得られるのである. 一般に

$$\int f(x)dx$$

とは書くものの, $f(x)$ の式の形を, 繊細な目で見つめることが重要なのである.

以下のことが身につけられれば, 本章以降の内容のうち技術的な基盤の部分についてほぼ把握したと考へてよい.

積分の方法：

1. 基本的な函数の単純な積分公式 (表 28.8).

2. 汎用性のある公式(“縦糸”).

(2a) 部分積分法(定理 28.12)

$$\int \underset{セ}{f(x)}\underset{ビ}{g(x)}\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

(2b) 置換積分 1 型(方法 (28.20));
別の変数 t を取つて $\displaystyle\int f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\,dt$ と変換する場合.

(2c) 置換積分 2 型(方法 (28.19)); $\displaystyle\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx$ だと見切る場合.

3. 特殊な方法(“横糸”).

(3a) 有理函数の積分(必ずできる. § 29.2).
分子は除法で次数下げ. 分母は部分分数分解で次数下げ.

(3b) $\displaystyle\int\Bigl(\cos x$ と $\sin x$ の有理式$\Bigr)\,dx$ の型. (§ 29.5).
$t = \tan\frac{x}{2}$ とおけば (3a) に帰着する.

(3c) $\displaystyle\int\Bigl(\sqrt{ax+b}$ と x の有理式$\Bigr)\,dx$ の型. (§ 29.6).
$\sqrt{ax+b} = t$ とおけば (3a) に帰着する.

(3d) $\displaystyle\int\Bigl(e^x$ の有理式$\Bigr)\,dx$ の型. (§ 29.7).
$t = e^x$ とおくと (3a) に帰着する.

(3e) $\displaystyle\int\Bigl(\sqrt{ax^2+bx+c}$ と x の有理式$\Bigr)\,dx$ の型. (§ 29.8).
§ 29.8 で説明する方法により (3a) に帰着する.

(3f) その他の非常に特殊なものもある. (〔≒p.105, 2.3 A2(3)(4) など〕).

29.4.　有理函数の積分 2

分母が 1 次式の積には因数分解されないときの方法を説明する．これも例で示した方がわかり易い．まづ, 基本的な原始函数

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C, \qquad \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+1| + C$$

を思ひ出しておく．

例題 29.9　積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$$

解答　まづ, 被積分函数を部分分数分解する．即ち

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1 x + B_2}{x^2+1}$$

とおいて定数 A, B_1, B_2 を求める．（ここで, なぜ第 2 項の分子を定数にしないで 1 次式にするのかを考へよ．）　両辺に $(x-1)(x^2+1)$ を掛けて得られる多項式の等式が恒等式になればよい．いづれにしても計算の結果は,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

となる．よつて

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\log|x^2+1| + C$$

となる．　□

例題 29.10　積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\,dx.$$

解答　被積分函数を部分分数分解する．即ち

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1\,x + B_2}{x^2+1} + \frac{C_1\,x + C_2}{(x^2+1)^2}$$

を満たす A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 を求める．これも両辺に $(x-1)^3(x^2+1)^2$ を掛けて得られる多項式の等式が恒等式になればよい．計算の結果は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\\ &\quad = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)^3} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\,dx\\ &\quad = \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8(x-1)^2} - \frac{1}{4}\log|x^2+1|\\ &\qquad\qquad + \frac{1}{8(x^2+1)} + \int \frac{1}{4(x^2+1)^2}\,dx.\end{aligned}$$

この最後の項の積分には手間が掛かるが,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \tan^{-1} x - \int \frac{x}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \tan^{-1} x + \frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \tan^{-1} x + \frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C'
\end{aligned}$$

となる. 以上をまとめて

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8(x-1)^2} - \frac{1}{4}\log|x^2+1| \\
&\qquad + \frac{1}{8(x^2+1)} + \frac{1}{8}\tan^{-1} x + \frac{x}{8(x^2+1)} + C
\end{aligned}$$

となる. □

29.2 の証明は多項式の互除法を使つてなされる. 詳しく知りたい場合は, 例へば, 一松 信 著 「微分積分入門 第 1 課」を見よ.

演 習 問 題

29.11 積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)(x-3)}\,dx.$ 〔≒2.3 A1(1)(2)〕

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx.$ 〔≒2.3 A1(3)〕

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2\,(x^2+x+1)}\,dx.$

29.5.　$\cos x$ と $\sin x$ の有理式の積分など

u と v の有理式 $R(u,v)$ について, 積分

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

は $t=\tan\frac{x}{2}$ と置換することで t の有理式の積分になる. 実際,

$$(u=)\ \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

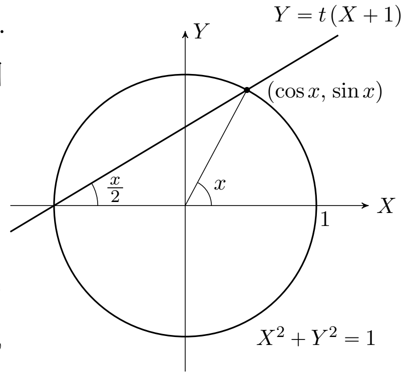
$$(v=)\ \sin x = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2\tan^{-1}t) = \frac{2}{1+t^2}$$

であるから

$$(\text{与式}) = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり, 被積分函数は t の有理式の積分である.



この置換の idea は, 非常に味はひ深い. 右図で $t=\tan\frac{x}{2}$ である. 点 $(\cos x, \sin x)$ の座標は連立方程式

$$\begin{cases} X^2+Y^2=1, \\ Y=t(X+1) \end{cases}$$

の解 (X,Y) のうち $(-1,0)$ でないものに他ならないから, $\sqrt{\quad}$ が外れない様な解とはならず, それは a priori に t の有理式である.

例題 29.12　次の積分を求めよ:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx.$$

解答　(方法 1) $t=\tan\frac{x}{2}$ と置換して,

$$(\text{与式}) = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t|+C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$

(方法 2) 分母子に $\sin x$ を掛けて変形することでもできる. 結果は

$$\log\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C$$

となる. □

例題 29.13　次の積分を求めよ:

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx.$$

解答　(方法 1)　$t=\tan\frac{x}{2}$ と置換して,

$$(\text{与式}) = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{2}{t+1}+C = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

(方法 2)　分母子の $1-\sin x$ を掛けて

$$(\text{与式}) = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \tan x - \frac{1}{\cos x}+C$$

となるが, この方法は一般性がない. □

例題 29.14 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{3+\cos x}\,dx.$$

解答 $t=\tan\frac{x}{2}$ と置換して，

$$(\text{与式}) = \int \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dt = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

となる． □

三角函数を含んだ積分計算の別の例を挙げる．

例題 29.15 次の積分を求めよ：

$$\int \sin 5x\,\cos 4x\,dx.$$

解答 この形は積和の公式を用いて次数を下げればよい．

$$(\text{与式}) = \int \frac{1}{2}\big(\sin(5x+4x)+\sin(5x-4x)\big)\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2}\big(\sin(9x)+\sin x\big)\,dx = -\frac{1}{18}\cos(9x)-\frac{1}{2}\cos x+C$$

となる． □

演 習 問 題

29.16 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\,(1+\cos x)}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1-2\sin x+\cos x}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\sin x-\cos x}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx.$ 〔≒ 2.2 A1(14)〕

(5) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$ 〔≒ 2.2 A1(16)〕

(6) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx.$ 〔= 2.2 A2(1)〕

(7) $\displaystyle\int (\sin x)\log|\sin x|\,dx.$ 〔= 2.2 A2(4)〕

29.17 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin 4x\,\cos 5x\,dx.$ 〔= 2.1 A5(2)〕

(2) $\displaystyle\int \cos 7x\,\cos 3x\,dx.$ 〔= 2.1 A5(3)〕

29.18 次の積分を求めよ．

$$\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx.$$

（Hint：部分積分と $t=\tan\frac{x}{2}$ による置換．）

29.6.　無理函数の積分 1

あいまひな謂(いひ)ではあるが, 根号を含んだ函数を 無理函数 といふ.

命題 29.19　a と b は定数で, $R(x,y)$ は x と y の有理式であるとする. このとき

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})\,dx$$

は $t=\sqrt{ax+b}$ と置換することで, t の有理式の積分に変換できる.

これの証明は述べないで, 例を挙げるに止める.

例題 29.20　次の積分を求めよ :

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\,dx.$$

解答　$t=\sqrt{2x+3}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-3}{2}$, $\dfrac{dx}{dt}=t$ であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-3}{t}\cdot t\,dt = \frac{1}{2}\int (t^2-3)\,dt \\ &= \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t + C = \frac{1}{6}(2x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(2x+3)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{\sqrt{2x+3}\,(x-3)}{3} + C \quad \cdots\cdots \text{ Ans.}\end{aligned}$$

となる. □

注意 29.21　より一般に u, v の有理式 $R(u,v)$, 自然数 n, 定数 a, b, c, d について,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

は, 次の置換により t の有理式の積分に変換される :

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

但し, $ad-bc\neq 0$ とする.

演 習 問 題

29.22　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-5}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\left(1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\right)}\,dx.$

$\left(\text{Hint} : t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}\right.$ とおくと,

$\left.(\text{与式}) = \displaystyle\int \left(\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t^2+t+1}\right) dt.\right)$

29.7. 指数函数を含む積分

指数函数 e^x の有理式は $u = e^x$ とおくことで積分できる.

例題 29.23 次の積分を求めよ:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx.$$

解答 $u = e^x$ とおくと $x = \log u$, $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{u}$ なので,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{u+u^{-1}}\frac{dx}{du}\,du = \int \frac{1}{u+u^{-1}}\frac{1}{u}\,du \\ &= \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \tan^{-1} u + C = \tan^{-1} e^x + C\end{aligned}$$

となる. □

有理式でない場合の例も挙げておく.

例題 29.24 次の積分を求めよ:

$$\int \sqrt{e^x - 1}\,dx.$$

解答 $u = \sqrt{e^x - 1}$ とおくと, $x = \log(u^2+1)$ で $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{2u}{u^2+1}$ なので,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int u\frac{2u}{u^2+1}\,du = \int \frac{2u^2}{u^2+1}\,du \\ &= \int \left(2 - \frac{2}{u^2+1}\right)du = 2u - 2\tan^{-1} u + C \\ &= 2\sqrt{e^x-1} - 2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1} + C\end{aligned}$$

となる. もし $t = e^x$ として計算を始めると 29.19 を利用して追加の置換積分を行ふ必要が生じる. つまり, 結局は上記の置換に誘導される. □

演 習 問 題

29.25 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{e^x - e^{-x}}\,dx.$ 〔$=$ 2.2 A1(13)〕

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x} + e^x}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{e^x + 1}\,dx.$ 〔$=$ 2.2 B2(1)〕

(4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}\,dx.$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}\,dx.$

29.8. 無理函数の積分 2

ここが後期の講義の中で, 最も高級な部分である. $R(x,y)$ は x と y の有理式であるとする. このとき, 定数 $a \neq 0$, b, c に対して, 積分

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,\right) dx$$

を求める方法を解説する. これには, 以下の事実を利用する.

2 次曲線の有理一意化の原理

方程式 $y^2 = ax^2+bx+c$ で表される曲線を C と記す.

(1) 曲線 C 上に 1 点 A を取つて固定し, C とそこを通る直線群を考へる. それらの曲線のそれぞれと C とのもう一つの交点の座標 $(x,y) = (x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)$ は, その直線の傾き t の有理式になる.

(2) C が双曲線の場合は, 直線群が通る固定点 A として曲線上の無限の遠方にある点を選んでもよい. つまり, ひとつ選んだ漸近線の傾きを持つた互ひに平行な直線群を考へて, (上記の傾きの代りに) y 軸での切片の座標を t とすれば交点の座標 $(x,y) = (x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)$ は t の有理式になる.

これを一般的に述べると返つてわかりづらいので, いくつかの例を示しつつ述べていく.

例題 29.26 次の積分を求めよ:

$$\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

解答 この問題では

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \tag{29.27}$$

とおくとよい. (理由は以下の 29.28 に述べてある.) このとき

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

であり,

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 2\right) \cdot \dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+1}\,dt \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\,t\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3(1-x)}{1+x}}\right) + C
\end{aligned}$$

と積分できる. □

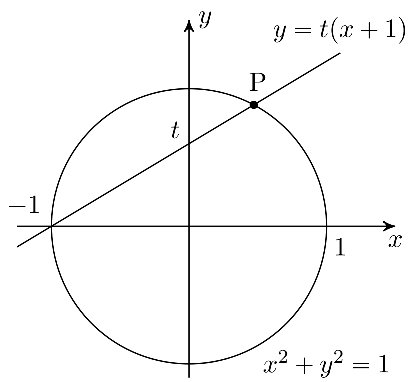
上記の解法は 29.21 と大いに関係がある. そのことについては 29.45 と 29.46 に述べてあるが, ここでは 29.21 とは切り離して理解されたい.

注意 29.28 29.26 の問題において, 安直に

$$y = \sqrt{1-x^2} \tag{29.29}$$

と置換積分してみても, 有理化はされず, 積分はできない（試してみよ）.

以下, 上の置換 (29.27) の idea を説明する. (29.29) は単位円の上半分を表し, 点 $(-1,0)$ を通る. いま新たに変数 t をとり, $(-1,0)$ を通つて, 傾き t の直線を考へて, その交点 P の x 座標が積分の変数 x だと見做し, x を t の式で表してみる. 同時に P の y 座標も t の式で表される. 具体的には次の連立方程式を解けばよい：



$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y = t(x+1). \end{cases}$$

ここで重要なのは, 次の様な考察からこの方程式を解かなくても（a priori に）この解 (x,y) は t の有理式になることを予見できることである. 実際, y を消去すれば x の 2 次方程式になる. もし, 解に本質的に根号 $\sqrt{}$ が必要となるならば, そこには $\pm\sqrt{}$ の形で 2 つの解が現れる. しかし, そもそも, 一方の解が $x=-1$ であることはわかつてゐるので, 根号は現れ得ない. つまり t の有理式となる [35].

少し一般化して, 楕円とその上の定点を通る直線の交点を考へやう. 具体的には

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y = t(x+a) \quad \text{（定点 } (-a,0) \text{ を通る）} \end{cases} \tag{29.30}$$

の解 (x,y) は t の有理式になることが, 同様な考察により予見できる.

さらに, 双曲線に関しても

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y = \dfrac{b}{a}x - t \quad \text{（傾きが漸近線と同一）} \end{cases} \tag{29.31}$$

の解 (x,y) も t の有理式になることが, この方程式を解かなくても予見できる. 図 29.32 から, 理由を見出して欲しい [36]. あまり利用されないが,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y = t(x+a) \quad \text{（定点 } (-a,0) \text{ を通る）} \end{cases}$$

の交点の座標は t の有理式になる. 次 page の図を参考に理由を考へていただきたい.

[35] 一般に, 一意化や有理化（媒介変数表示）は深い考察に基く. 「志村・谷山予想」も驚くべき方法での一意化が可能であることを主張するものであつた.

[36] この場合は (29.30) の「定点」に相当する点が無限遠にあるとも考へられる.

図 29.32　双曲線の有理一意化 (1)

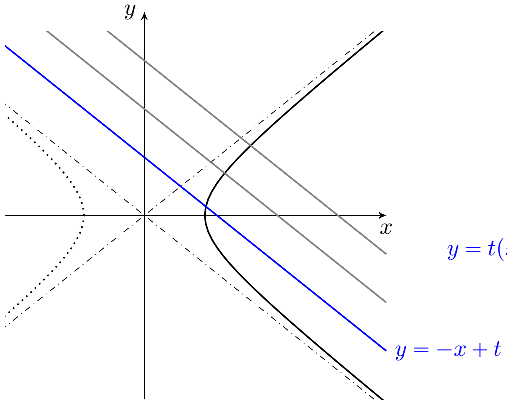
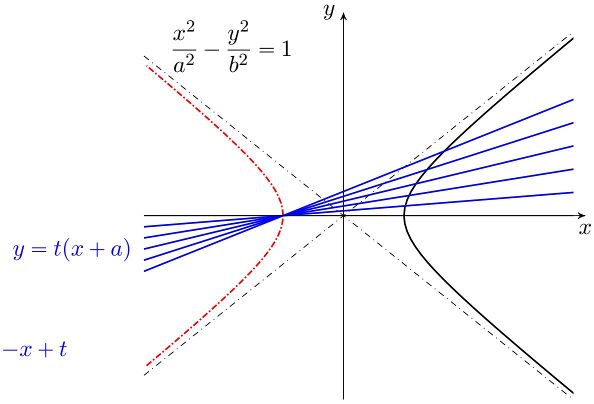


図 29.33　双曲線の有理一意化 (2)



ここで (29.31) の考へを使つて例題を解いておく．

例題 29.34　次の積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx.$$

解答　$\sqrt{x^2+A}+x=t$ とおくと（傾き -1 の直線の y 切片を t とおく）

$$x^2+A=(t-x)^2=t^2-2tx+x^2, \quad \therefore\ 2tx=t^2-A;$$

$$x=\frac{t^2-A}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{A}{t}\right), \qquad \therefore\ \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{t^2}\right)=\frac{t^2+A}{2t^2}. \tag{29.35}$$

このとき

$$\sqrt{x^2+A}=t-x=t-\frac{t^2-A}{2t}=\frac{t^2+A}{2t}.$$

ゆゑに

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int\frac{2t}{t^2+A}\frac{t^2+A}{2t^2}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt\\&=\log|t|+C=\log\left|\sqrt{x^2+A}+x\right|+C.\end{aligned}$$

を得る．　□

これを公式として記憶されることをお勧めする．

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx=\log\left|\sqrt{x^2+A}+x\right|+C =-\log\left|\sqrt{x^2+A}-x\right|+C'. \tag{29.36}$$

但し，上の解答の冒頭の置換を $\sqrt{x^2+A}-x=t$ に変更することで，上記 (29.36) の下段が得られる．試してみられたい．ここで $\dfrac{A}{\sqrt{x^2+A}-x}=\sqrt{x^2+A}+x$ に注意すれば，$C'=\log|A|+C$ であることがわかる．

例題 29.37 実数 A について次の積分を求めよ：

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx.$$

解答 1 ここでも $\sqrt{x^2+A}+x=t$ とおくと, (29.35) により,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{(t^2+A)^2}{4t^3}dt = \frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2A}{t}+\frac{A^2}{t^3}\right)dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2+2A\log|t|-\frac{A^2}{2t^2}\right)+C.\end{aligned} \tag{29.38}$$

ここで

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}+x}=\frac{\sqrt{x^2+A}-x}{A}, \quad \therefore\ \frac{A}{t}=\sqrt{x^2+A}-x.$$

よつて (29.38) の最後について, 第 1 項と第 3 項の和は

$$\frac{1}{8}\left(t^2-\frac{A^2}{t^2}\right)=\frac{1}{8}\left((\sqrt{x^2+A}+x)^2-(\sqrt{x^2+A}-x)^2\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+A}$$

となり, 最終的には

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|\sqrt{x^2+A}+x\right|\right)+C$$

を得る. □

この解答の冒頭の置換を $\sqrt{x^2+A}-x=t$ に変更すると

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}-A\log\left|\sqrt{x^2+A}-x\right|\right)+C'$$

得られるが, これは, 先に得られた結果と $(\sqrt{x^2+A}+x)(\sqrt{x^2+A}-x)=A$ により

$$\log\left|\sqrt{x^2+A}+x\right|=\log\left|\frac{A}{\sqrt{x^2+A}-x}\right|=-\log\left|\sqrt{x^2+A}-x\right|+\log|A|$$

と理解してもよい. 特に $C'=\frac{1}{2}A\log|A|+C$ である.
上の計算はたいへんだつたので, この結果も公式として記憶されることをお勧めする.

$$\boxed{\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+A}\,dx &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|\sqrt{x^2+A}+x\right|\right)+C \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}-A\log\left|\sqrt{x^2+A}-x\right|\right)+C'.\end{aligned}} \tag{29.39}$$

但し, 以下の方法なら (29.36) のみ記憶して (29.39) を記憶しなくても問題ない.

解答 2 部分積分法によつて

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\int \underset{セ}{1}\,\underset{ビ}{\sqrt{x^2+A}}\,dx=x\sqrt{x^2+A}-\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2-A+A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx=x\sqrt{x^2+A}-\int\sqrt{x^2+A}\,dx+A\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$

となる. ここで (29.36) を利用すれば

$$2\int\sqrt{x^2+A}\,dx=x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|\sqrt{x^2+A}+x\right|+2C$$

を得て, 再び (29.39) が得られた. □

上記, 解答 2 の考へ方を使ふと次の積分も得られる.

例題 29.40　$a > 0$ を定数とする. 次の積分を求めよ:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

解答　部分積分法によつて

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int \underset{\text{セ}}{1} \underset{\text{ビ}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int x \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + \int \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx \quad (\because a > 0) \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + 2C
\end{aligned}$$

となるから,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$

を得る. □

これも公式として挙げておく.

$$(29.41) \qquad \boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C}$$

問 29.42　29.40 の積分を以下のそれぞれの方法で求め, (29.41) と比較せよ.

(1)　$x = a\sin\theta$ とおいて置換積分で.

(2)　$t = \sqrt{\dfrac{a - x}{x + a}}$ とおいて置換積分で.　(Hint: 途中で $\tan^{-1} t$ が現れるが, $\tan^{-1} t = \frac{v}{2}$ とおき, $\cos v$ を t で表し, 5.8 または 28.9 を利用する.)

注意 29.43　(当然のことながら) 第 29.5 節で述べた idea と本節で述べた idea とは表裏一体の関係にある. 従つて, $\sqrt{x \text{ の 2 次式}}$ を適切な三角函数への置換によつて根号を外せるならば [37]「本節の形の無理積分 → 三角函数の有理式 → 有理式」といふ置換を経て, 積分を求めることが可能である. また, 第 12 節に述べる双曲線函数を学べば, 双曲線に関連する無理積分についての理解が深まるだらう.

[37] 例へば $\sqrt{1 - x^2}$ に対しては $x = \sin t$ と置換, $\sqrt{1 + x^2}$ に対しては $x = \tan t$ と置換する, など.

以上の説明に基き, 方法のみをまとめれば, 次の様になる.

29.44 1 種類の 2 次式の平方根を含む積分の求め方.
$R(x,y)$ が x, y の有理式であるとき, 以下の方法で

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,\right) dx$$

は t の有理積分の形に変形される：
(1) $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解される場合は

$$\sqrt{\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}} = t,$$

(2) $a>0$ ならば

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\,x = t \quad \left(\text{或いは } \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}\,x = t\right)$$

とおけ. ただし, 上記 (1) と (2) は互ひに排反ではなく, $a>0$ で $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解される場合は, (1) と (2) の双方が使へる. その場合, (1) の方法だと $x-\alpha$ と $x-\beta$ の符号に関して場合分けが必要となる.

くどいかも知れないが, もう 1 題だけ提示しておく.

例題 29.45 積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(1-x)}}$ を求めよ.

解答 上の説明 (1) に従つて $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$ とおくと $x = -\dfrac{2t^2-1}{t^2+1}$ となる. 従つて

$$\sqrt{(x+2)(1-x)} = (x+2)\sqrt{\frac{1-x}{x+2}} = \left(-\frac{2t^2-1}{t^2+1}+2\right)\cdot t = \frac{3t}{t^2+1},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-6t}{(t^2+1)^2}$$

である. よつて

$$(\text{与式}) = \int \frac{t^2+1}{3t}\cdot\frac{-6t}{(t^2+1)^2}\,dt = -\int \frac{2}{t^2+1}\,dt$$
$$= -2\tan^{-1} t + C = -2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x+2}} + C \quad \cdots\cdots \text{ Ans.}$$

となる. □

注意 29.46 29.45 の解答から察せられる様に 29.44 (1) 型の問題は 29.21 の型であると見做すことができる.

演 習 問 題

29.47 積分を求めよ. 〔≒2.3 B2〕

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2-x)}}$.

(2) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$.

(3) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$.

(4) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}\,dx$.

§ 30.　微分積分学の基本定理, 面積

30.1.　定積分

閉区間 $[a, b]$ を次の様な小区間に分割する：

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

これを, 以下, 簡単に分割 Δ と称し, $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ $(i = 1, \cdots, n)$ と書く. また $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1} \,|\, 1 \leqq i \leqq n\}$（小区間の幅の最大値）と記し, Δ の目と称する. さらに, 各 $[x_{i-1}, x_i]$ から一つづつ任意に値を取り出して ξ_i と記す. ここで, 我々が示したいのは, 次の事実である.

定理 30.1　閉区間 $[a, b]$ で定義された連続函数 $f(x)$ について, 極限値

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

が存在する. ここで, 極限の意味は以下で説明される. この極限においては, もちろん n は無限に大きくなつていくし, 集合 $\{\xi_i\}$ は Δ の変化につれて変化する.

証明　$f(x)$ は連続だから, 各小区間 $[x_0, x_1]$ 上の最小値 m_i と最大値 M_i が存在する.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i.$$

ここで, 左辺, 中辺, 右辺を図示したものが次 page の 3 つの図であり, それぞれ, 図 30.5, 図 30.6, 図 30.7 に対応する. ここで, Δ を細かくするにつれて, 左辺は増大し, 右辺は減少する. また, 右辺と左辺の差は, $\{M_i - m_i \,|\, 1 \leqq i \leqq n\}$ の最大値 d の $b - a$ 倍以下である. $|\Delta| \to 0$ のとき $d \to 0$ であるから, 左辺と右辺の差は 0 に限りなく近付く. 以上のことから, $|\Delta| \to 0$ のとき, 各辺は一定の値に限りなく近づく. □

定義 30.2 上の極限値を $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分と称し, 次の様に記す:

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{30.3}$$

$f(x)$ はこの定積分の被積分函数と呼ばれる. さらに $a \geqq b$ の場合,

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

と定める. 特に $a = b$ の場合はこの値は 0 である.

注意 30.4　例へば, 定義域の区間の有限個の点でのみ不連続な函数についても同様な極限（定積分）を定義できる. この様な函数を含めたより一般な函数についても定積分の概念を拡張できる. しかし, 記述がとても煩雑になるので, この note では省略する.

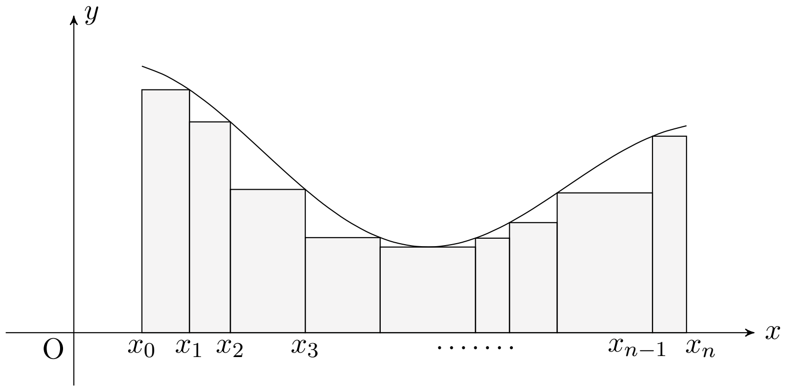


図 30.5 定積分の定義

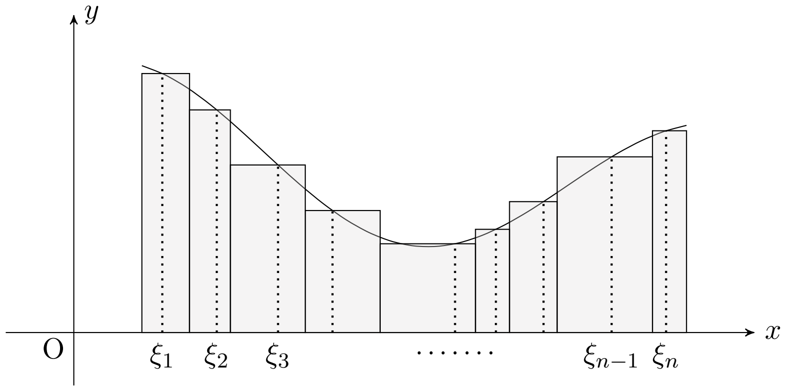


図 30.6 定積分の定義

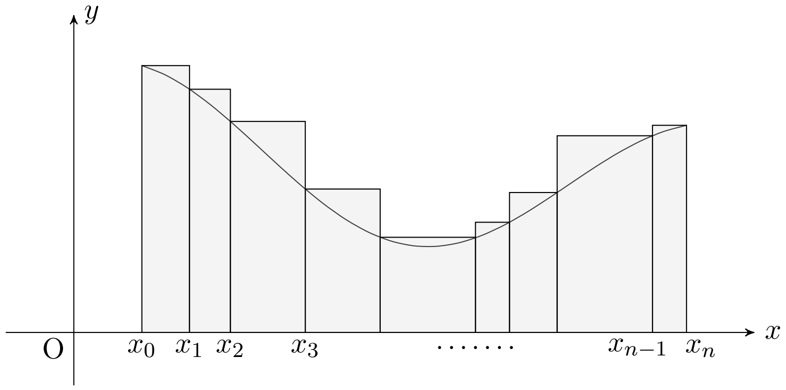


図 30.7 定積分の定義

注意 30.8 （面積）連続函数 $f(x)$ について, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分のうち, $y \geqq 0$ なる部分の面積を S_+ とし, $y \leqq 0$ なる部分の面積を S_- とすると, (30.3) の値は $S_+ - S_-$ を与へる [38].

[38] ここでは, 「数学的に厳密に面積とは何か」を問はないで直観的な理解で済ませる.

定積分は以下に示す様に分割して計算ができる.

補題 30.9 a, b, c を含む区間 I で連続な函数 $f(x)$ について, 次が成り立つ:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx. \tag{30.10}$$

証明 $a = b$ または $b = c$ のときは明らかに成り立つ. 次に $a < b < c$ のときには b を分割箇所の 1 つに含めておき, 右辺についての (30.3) を考へよ. このとき (30.3) の左辺の和を $[a, b]$ の部分の和と $[b, c]$ の部分の和に分けることで, 上記の左辺に一致することが了解される. a, b, c がその他の大小関係にあるときも, (30.3) を使つて最初の場合に帰着させることで示される. □

30.2. 不定積分, 微分積分学の基本定理

まづ不定積分の定義を述べる.

定義 30.11 連続函数 $f(x)$ の定義域内に含まれる区間 $[a, b]$ において, b が変化するとき, 定積分を使つて函数

$$b \longmapsto \int_a^b f(x)dx \quad \left(x \text{ を変数に留保したいので, これを } \int_a^b f(\xi)\,d\xi \text{ とも記す.}\right)$$

が定義される. これを, 次の記号で表して, a を基点とする不定積分[39] と呼ぶ:

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi. \tag{30.12}$$

ここまでの流れでは, 原始函数と (不) 定積分は全く別々の概念である. しかし, それが表裏一体の関係にあることを主張するのが次の微分積分学の基本定理である.

定理 30.13 (微分積分学の基本定理) 連続函数 $f(x)$ は原始函数を持つ. その 1 つを $F(x)$ と記すとき, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \left(= \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と記す}\right).$$

注意 30.14 これにより, 曲線で囲まれた図形の面積を代数的な計算で求めることができる様になつた! 球の体積の公式をなぜ美しいと感じたのか, その 1 つの答が与へられたとも言へる.

注意 30.15 微分積分学の基本定理 30.13 において b を変化させてみることにより, 不定積分は $f(x)$ の原始函数の 1 つに他ならないことがわかる. それゆゑ, 原始函数と不定積分は同一の概念と見做されることが多い.

[39] 「不定積分」の用法は, 旧来のそれ (例へば [8a], p.273) とは異なる. 微分積分学の基本定理の意義をより明確にするためと (30.12) に名称が欲しいので, この様な用法にしてみた.

証明 (30.13 の) まづ

$$G(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

とおく. $G'(x) = f(x)$ であることが次の様にしてわかる. 区間 $[x, x + \mathit{\Delta} x]$ 内での $f(x)$ の最小値, 最大値をそれぞれ m, M とせよ. このとき,

$$\begin{aligned}
m \cdot \mathit{\Delta} x &\leqq \int_x^{x+\mathit{\Delta} x} f(\xi)\,d\xi \leqq M \cdot \mathit{\Delta} x \quad (\mathit{\Delta} x > 0 \text{ のとき}),\\
m \cdot \mathit{\Delta} x &\geqq \int_x^{x+\mathit{\Delta} x} f(\xi)\,d\xi \geqq M \cdot \mathit{\Delta} x \quad (\mathit{\Delta} x < 0 \text{ のとき}),\\
G(x + \mathit{\Delta} x) - G(x) &= \int_x^{x+\mathit{\Delta} x} f(\xi)\,d\xi \quad (\because (30.10))
\end{aligned}$$

であるから,

$$m \leqq \frac{G(x + \mathit{\Delta} x) - G(x)}{\mathit{\Delta} x} \leqq M.$$

ここで, $f(x)$ は連続函数なので $\mathit{\Delta} x \to 0$ のとき, $m \to f(x)$, $M \to f(x)$ である. 従つて

$$\left(\lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{G(x + \mathit{\Delta} x) - G(x)}{\mathit{\Delta} x} = \right) G'(x) = f(x)$$

でなくてはならない. 以上から $G(x)$ は原始函数の 1 つであることがわかつた. 以下 $F(x)$ を $f(x)$ 任意の原始函数とする. ここで,

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x) + C$$

であるが, $x = a$ とすれば $0 = F(a) + C$ なので, $C = -F(a)$ である. ゆゑに

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F(x) - F(a). \qquad \therefore \int_a^b f(x)\,dx \left(= \int_a^b f(\xi)\,d\xi \right) = F(b) - F(a)$$

がわかり, 証明は終はる. □

これまで学んだ, 種々の函数の原始函数を与へる公式を使へば, 定積分が次々と計算される.

例 30.16 計算例を挙げる:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

演 習 問 題

30.17 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos x\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x \cos 3x\,dx.$ 〔≒2.5 A2(4)〕

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$

(6) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x - 1)}\,dx.$

30.3.　区分求積法

ここでは, §30.2 で学んだ事実を利用した式変形（区分求積法）を応用してみる.

例題 30.18　次の式を第 n 項とする数列の極限を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{n^2}. \tag{30.19}$$

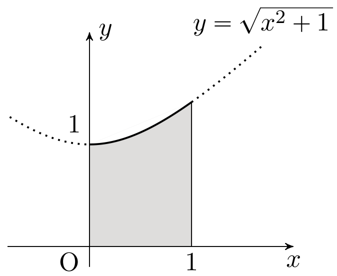
解答　上に述べたことから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx \quad (n\to\infty)\\ &= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\log\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\right)\end{aligned}$$

である.　□

注意 30.20　上の (30.19) の第 10, 50, 100, 300 項を計算した値を記す:

n	第 n 項
10	$1.169093\cdots$
50	$1.151959\cdots$
100	$1.149870\cdots$
300	$1.148484\cdots$
真値	$1.147793\cdots$



ここから, 理論的な計算がどれほど強力かを感じていただきたい.

演習問題

30.21　次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{2n}\right)$.　〔≒ 2.5 A1(1)〕

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.　〔≒ 2.5 A1(2)〕

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+3n^2}$.

(4) $\cancel{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}}$.　〔= 2.5 A1(4)〕
これは広義積分が必要なので 31.34 へ移動した.

§ 31. 定積分の計算

31.1. 定積分の基本性質

ここで, 定積分の基本的な性質をまとめておく.

命題 31.1 (定積分の線形性など) a, b を含む区間 I で連続な函数 $f(x), g(x)$ と任意の定数 k について, 次が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int_a^b \bigl(f(x)+g(x)\bigr)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

(3) 区間 $[a, b]$ で $f(x) \leqq g(x)$ であれば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$

(4) 区間 $[a, b]$ で $f(x) \leqq g(x)$, かつ, ある $x_0 \in [a, b]$ で $f(x_0) < g(x_0)$ ならば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$

証明 以下 $f(x), g(x)$ の原始函数を選んで $F(x), G(x)$ と書く.

(1) 28.3(1) より $F(x)+G(x)$ は $f(x)+g(x)$ の原始函数なので, 30.2 を何度か使つて

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Bigl[F(x)+G(x)\Bigr]_a^b = \bigl(F(b)+G(b)\bigr) - \bigl(F(a)+G(a)\bigr) \\
&= \bigl(F(b)-F(a)\bigr) + \bigl(G(b)-G(a)\bigr) = \Bigl[F(x)\Bigr]_a^b + \Bigl[G(x)\Bigr]_a^b = (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

(2) 28.3(2) により, $kF(x)$ は $kf(x)$ の原始函数であるから, 30.2 を 2 回使つて,

$$
(\text{左辺}) = \Bigl[kF(x)\Bigr]_a^b = kF(b) - kF(a) = k\bigl(F(b)-F(a)\bigr) = k\Bigl[F(x)\Bigr]_a^b = (\text{右辺}).
$$

(3) 函数 $g(x) - f(x)$ を $f(x)$ として (30.3) を適用する. 仮定より $g(x) - f(x) \geqq 0$ であるから, (30.3) の左辺の $\lim$ の中のすべての項が正または 0 である. 定積分を定義するときの分割に関する極限でも, 数列の極限に関する 2.16 と同様のことが成り立ち,

$$
\int_a^b \bigl(g(x) - f(x)\bigr)\,dx \geqq 0; \qquad \therefore\ \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.
$$

(4) 仮定および 6.18 (1) と極限の定義 6.1 (1) から, x_0 を含むある小区間 $[a_0, b_0] \subset [a, b]$ (但し $a_0 < b_0$) において $f(x) < g(x)$ が成り立つ. この小区間は閉区間であることと $g(x) - f(x)$ の連続性とから, この小区間において $g(x) - f(x)$ の最小値は存在し, その値 m について $m > 0$ である. ゆゑに (3) を用いて

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \bigl(g(x) - f(x)\bigr)\,dx \\
&\quad = \int_a^{a_0} \bigl(g(x) - f(x)\bigr)\,dx + \int_{a_0}^{b_0} \bigl(g(x) - f(x)\bigr)\,dx + \int_{b_0}^b \bigl(g(x) - f(x)\bigr)\,dx \\
&\quad \geqq \int_{a_0}^{b_0} m\,dx = m(b_0 - a_0) > 0
\end{aligned}
$$

となり, 所望の不等式が示された. □

ここで 31.1 (1), (2) について別証を与えておく．前 page では 30.13 を使ったが，以下のは定積分の定義のみに基く．

別証　(1) 閉区間 $[a,b]$ の分割 Δ

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

に対して (30.3) の左辺を 3 つの函数 $f(x)+g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ について用意する．ここでも $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ と記す．それら 3 つについて，明らかに関係

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i$$

が成り立ち，3 つの函数はどれも連続ゆゑ，30.1 により，これらの $|\Delta| \to 0$ のときの極限が存在し，(6.10) と類似した考察によつて，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\,\Delta x_i = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i$$

が成り立つことがわかる．これは (30.3) から

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

を意味する．

(2) も同様である．即ち，上の分割 Δ に対して，(30.3) の左辺を $kf(x)$ についても用意する．そのとき，

$$\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i$$

が成り立ち，$kf(x)$ も連続だから左辺の $|\Delta| \to 0$ のときの極限も存在し，(6.9) と類似した考察によつて，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta x_i = k \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i$$

が成り立つことがわかる．これは (30.3) から

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

を意味する．　□

ここで, 16.6 で述べた級数の発散を積分を使って証明する.

例題 31.2 次の無限級数が ∞ に発散することを示せ. 〔≒ 1.3 A2 (3)〕

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

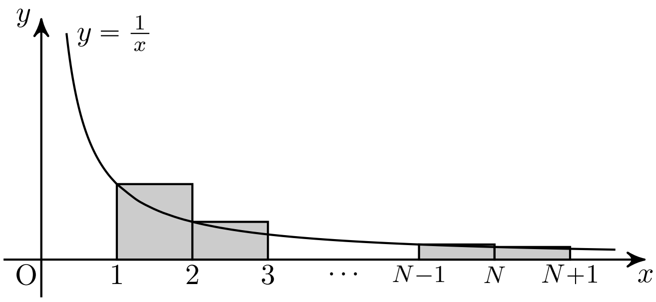
解答 $1 \leqq n-1 < x < n$ のとき, $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{x}$ であるから, 上の級数の第 n 項について

$$\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx.$$

よって

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(N+1) \longrightarrow \infty \quad (N \to \infty)$$

となるから（下図を参照）与式は発散する. □



問 31.3 次の級数の収束を以下の指示に従って示せ: 〔≒ 1.3 A2 (2)〕

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots .$$

$n = 2, 3, \cdots$ について 面積の比較から $\dfrac{1}{n^2} < \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^2}\, dx$ を示し, これを利用して.
（以前の 16.7 も参照されたい. ）

演 習 問 題

31.4 次の不等式を積分を利用して示せ:

(1) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots < 2.$ 〔= 2.6 A3(1)〕

(2) $1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots < \dfrac{4}{3}.$ 〔= 2.6 A3(2)〕
(16.8 も参照されたい.)

31.2.　Euler の定数★

ここで, 31.1(3), (4) の有名な応用例を挙げておく.

例題 31.5★　次の (1), (2) に答へよ. 〔≒2.6 B〕

(1) 次の b_n を第 n 項とする数列 $\{b_n\}$ を考へる（これの図形的意味付けを講義で説明）:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1).$$

任意の $n \geqq 1$ について, $b_n < 1$ および $b_{n+1} - b_n > 0$ を示せ.

(2) 次の極限値が存在することを示せ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad 但し\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

解答　(1) 区間 $[k, k+1]$ に属する x について成り立つ不等式

$$\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k} \quad (等号は\ x = k,\ k+1\ 以外で不成立)$$

をこの区間で積分することにより（31.1(3), (4) を使つて）

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx = \frac{1}{k}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{k+1} < \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k}. \tag{31.6}$$

(31.6) の左側の不等式を $k = 1$ から n まで辺々加へると

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \log(n+1).$$

$$\therefore\ b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) < 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

(31.6) の右側の不等式で $k = n+1$ として得られる

$$\log(n+2) - \log(n+1) < \frac{1}{n+1}$$

により

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+2) + \log(n+1) > 0.$$

(2) 数列 $\{b_n\}$ は上界 1 を持つ単調増加数列ゆゑ 3.4 により収束する. しかるに,

$$a_n - b_n = \log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

であるから, (2.20) より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty} b_n$$

が存在する. □

注意 31.7　上の極限値 γ は Euler（オイラー）の定数 と呼ばれ, 近似値は

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090\cdots$$

である. これは無理数であらうと予想されてゐる.

31.3. 定積分に関する部分積分法と置換積分法

この節では定積分に関する部分積分法と置換積分法を説明する.

定理 31.8 (部分積分法) a, b を含む区間 I で定義された 2 つの連続函数 $f(x)$ と $g(x)$, および $f(x)$ の 1 つの原始函数 $F(x)$ について, 次の公式が成り立つ:

$$\int_a^b \underset{セ}{f(x)}\,\underset{ビ}{g(x)}\,dx = \Big[F(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx.$$

証明 不定積分は原始函数だから 28.12 と 28.3(1) より $x \in I$ のとき,

$$\int_a^x f(\xi)\,g(\xi)\,d\xi = F(x)\,g(x) - \int_a^x F(\xi)\,g'(\xi)\,d\xi + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

この式で $x = a$ とすれば

$$C = -F(a)g(a)$$

がわかる. さらに $x = b$ とすれば与式を得る. □

例題 31.9 次の定積分の値を求めよ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx.$$

解答 部分積分法 31.3 により

$$(\text{与式}) = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$

を得る. □

例題 31.10 次の定積分の値を求めよ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$$

解答 部分積分の公式 31.3 により

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underset{ビ}{x} \cdot \underset{セ}{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx \\
&= \Big[x \tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \left(-\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \log 1\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}
\end{aligned}$$

となる. □

定理 31.11 （置換積分法） $f(u)$ を a, b を含む区間 I で定義された連続な函数とする．さらに $\varphi(x)$ を区間 J で定義されて, その値域が I に含まれる微分可能な函数とする．また $A=\varphi(a)$, $B=\varphi(b)$ とする．このとき次の式が成り立つ．

$$\int_A^B f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$$

証明 不定積分は原始函数だから 28.18 は

$$\int_A^{\varphi(x)} f(u)du = \int_a^x f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,d\xi + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

と書ける．ここで $x=a$ としてみると $0=C$ がわかり, さらに $x=b$ とすれば所望の公式が得られる． □

もちろん 31.11 についても 使用法 1（28.19）, 使用法 2 （28.20）に対応して 2 通りの使用法があるので, 式だけ書いておく：

使用法 1 $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\frac{dx}{dt}dt \quad \bigl(x=\psi(t),\ \ a=\psi(\alpha),\ b=\psi(\beta)\bigr),$$
（左辺の x に t の函数を代入する）

使用法 2 $$\int_a^b f(u)\frac{du}{dx}dx = \int_A^B f(u)du \qquad \bigl(u=\varphi(x),\ \ A=\varphi(a),\ B=\varphi(b)\bigr).$$
（与式の形が左辺の形をしてゐると見抜いて右辺の形へ）

例題 31.12 次の定積分の値を求めよ：

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

解答 公式 (29.39) を使へばよいが, 復習も兼ねて使はないで計算してみる．29.44(3) に従つて $t=\sqrt{1+4x^2}-2x$ とおくと, x が 0 から 1 に増加するとき, t は 1 から $\sqrt{5}-2$ へ減少する．

$$(t+2x)^2 = 1+4x^2 \ \text{ より } t^2+4xt=1. \quad \therefore\ x=\frac{1-t^2}{4t}.$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt} = -\frac{1+t^2}{4t^2}. \ \text{ また } \sqrt{1+4x^2} = t+2x = t+\frac{1-t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{2t}.$$

よつて

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_1^{\sqrt{5}-2} \frac{1+t^2}{2t}\Bigl(-\frac{1+t^2}{4t^2}\Bigr)dt = -\frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{5}-2} \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\,dt \\
&= -\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2t^2} + 2\log|t| + \frac{1}{2}t^2\right]_1^{\sqrt{5}-2} \\
&= -\frac{1}{8}\Bigl(-\frac{1}{2}(9+4\sqrt{5}) + 2\log(\sqrt{5}-2) + \frac{1}{2}(9-4\sqrt{5})\Bigr) \\
&= \frac{1}{8}\bigl(2\log(\sqrt{5}+2) + 4\sqrt{5}\bigr) = \frac{1}{4}\log(\sqrt{5}+2) + \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

を得る． □

注意 31.13 31.11 において, $\varphi(x)$ は単調な函数でなくても良い. 例へば $u = -\sin x$ のとき, x が $0 \to \frac{3}{2}\pi$ と変化するとき, u は一旦は減少し増加へ転じる: $0 \to -1 \to 1$. しかし,

$$\begin{aligned}\int_0^1 u\,du &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (-\sin x)\,\frac{du}{dx}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (-\sin x)(-\cos x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と正しく計算される.

例題 31.14 (Wallis(ウォリス)[40] 積分) 次の等式を示せ: 〔= 2.5 B1(1)(2)(3)〕

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

(31.15)
$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n \geqq 2 \text{ は偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n \geqq 3 \text{ は奇数}). \end{cases}$$

解答 最初の等号は $t = \frac{\pi}{2} - x$ とおくことで示される. 求める定積分を

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

をおく. (28.26) で, $x = \frac{\pi}{2}$ を代入したものから $x = 0$ を代入したものを差し引けば

(31.16)
$$\begin{aligned} (n+2)A_{n+2} &= (n+1)A_n, \\ \therefore\ A_n &= \frac{n-1}{n}A_{n-2} \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

を得る. これより n が偶数のときは,

(31.17)
$$A_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot A_0$$

となり, n が奇数のときは,

(31.18)
$$A_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot A_1$$

となる. $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$ ゆゑ, 与式が示された. □

[40] John Wallis, 1616 年 11 月 23 日 – 1703 年 10 月 28 日, England 生まれ.

注意 31.19*　(31.15) から Wallis(ウォリス) の公式と呼ばれる公式が得られる．〔= 2.5 B1(4)〕
区間 $(0,\frac{\pi}{2})$ において $0<\sin x<1$ だから $\sin^{2n}x<\sin^{2n+1}x<\sin^{2n+2}x$ であり，31.14 の記号で, $A_{2n}<A_{2n+1}<A_{2n+2}$ である．ゆゑに (31.16) を用いて

$$1<\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}<\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}}=\frac{2n+1}{2n+2}\longrightarrow 1\ (n\to\infty).\quad \therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}=1. \tag{31.20}$$

一方 (31.17) と (31.18) から

$$\begin{aligned}\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}&=\frac{\dfrac{2n}{2n+1}\cdot\dfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\dfrac{2n-4}{2n-3}\cdot\dfrac{2n-6}{2n-5}\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdot\dfrac{2n-5}{2n-4}\cdot\dfrac{2n-7}{2n-6}\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}}\\&=\frac{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2(2n-6)^2\cdots4^2\cdot2^2}{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2(2n-5)^2(2n-7)^2\cdots5^2\cdot3^2}\cdot\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

ここで n の偶奇に応じて

$$n!!=n(n-2)(n-4)\cdots4\cdot2,\quad n!!=n(n-2)(n-4)\cdots3\cdot1$$

といふ記号を用いると

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}=\frac{\big((2n)!!\big)^2}{(2n+1)!!\,(2n-1)!!}.$$

(31.20) によつて, 次を得る：

> Wallis の公式：
>
> $$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\big((2n)!!\big)^2}{(2n+1)!!\,(2n-1)!!}. \tag{31.21}$$

演 習 問 題

31.22　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3x\cos x\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3}xe^{x^2+1}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_0^1\tan^{-1}x\,dx.$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5x\,dx.$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6x\,dx.$

(7) $\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

(8) $\displaystyle\int_0^2\sqrt{4+x^2}\,dx.$

31.4. 面積の計算

この節では面積の計算について例を通して述べる.

例題 31.23 $a>0$ を定数とする. Cycloid

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

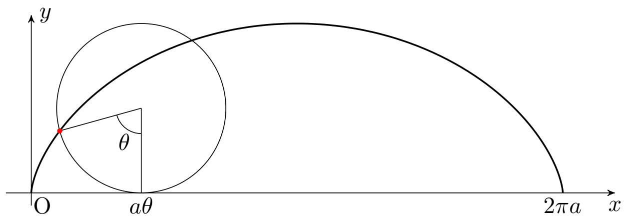
と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ. ちなみに, この曲線は, 中心が $(0,a)$ の位置に置かれてゐた半径 a の動円が, x 軸に常に接しながら滑らない様に回転して動くときに, 最初に原点の位置にあつた動円の周上の点が, この動きによつて描く曲線に他ならない.

解答 x は 0 から $2\pi a$ へ変化し,

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$$

なので

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta \\ &= a^2(2\pi - 2\cdot 0 + \pi) = 3\pi a^2 \end{aligned}$$



となる. □

面積の計算では, 次のこともよく使はれる.

命題 31.24 区間 $[a,b]$ で定義された 2 つの連続函数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の graphes と 2 直線 $x=a$, $x=b$ によつて囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

で与へられる.

証明 まづ 区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ である場合を考へる. この場合, 30.8 によつて, 求める面積は

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

であるから主張は正しい. それ以外の場合はすべてこの場合に帰着される. □

極座標で表示された図形の面積の計算について述べる.

命題 31.25　極座標において, 連続函数 $f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ と, 原点を始点とする 2 本の半直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ により囲まれた図形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\, d\theta$$

で与へられる.

証明　区間 $[\alpha, \beta]$ を細分して

$$\varDelta : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

$$[\alpha, \beta] = [\theta_0, \theta_1] \cup [\theta_1, \theta_2] \cup \cdots \cup [\theta_{n-1}, \theta_n]$$

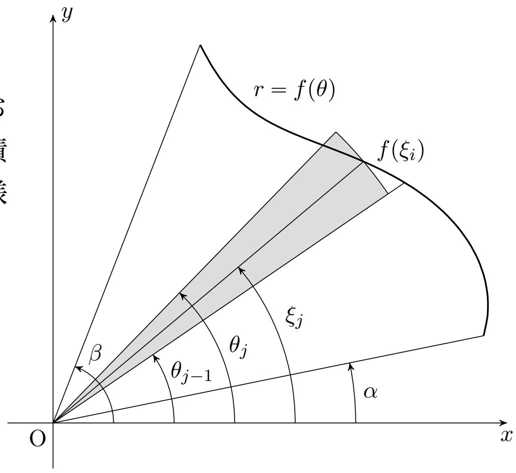
とし, 各小区間から $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ を選んでおく. このとき, 右図の塗りつぶした部分の面積は $\frac{1}{2} f(\xi_i)^2(\theta_j - \theta_{j-1})$ であるから, 30.8 と同様の考察によつて, 所望の面積は

$$S = \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} f(\xi_i)^2(\theta_j - \theta_{j-1})$$

である. これは (30.3) によつて

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2\, d\theta$$

で与へられる. □

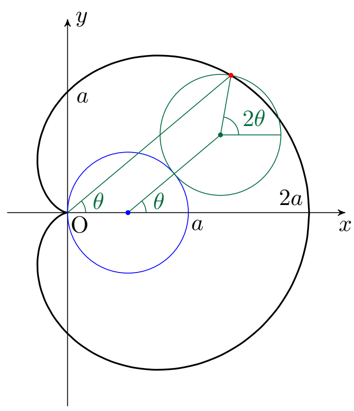


例題 31.26　$a > 0$ を定数とする. 極座標による方程式 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線（cardioid, 心臓形）で囲まれる部分の面積 S を求めよ. ちなみに, この曲線は下図の様に, 点 $(\frac{a}{2}, 0)$ を中心とした半径 $\frac{a}{2}$ の固定円の周りを, 同じ半径 $\frac{a}{2}$ の動円が固定円と接しながら滑らない様に一周するとき, 動円が点 $(a, 0)$ で接してゐたときにこの円の周上の座標が $(2a, 0)$ にあつた点が, この動きによつて描く曲線に他ならない.

解答　31.25 を使つて,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos\theta)^2\, d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left(2\pi + 0 + 4\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{3a^2\pi}{2} \quad \cdots\cdots \text{ Ans.} \end{aligned}$$

となる. □



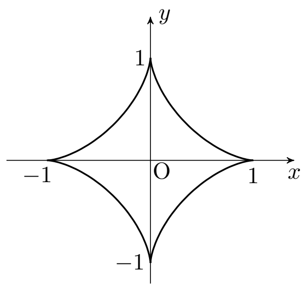
演 習 問 題

31.27 θ を媒介変数として, 直交座標系で, 方程式

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$$

で表される曲線で囲まれた図形（asteroid, 星芒形）の面積 S を求めよ.

asteroid



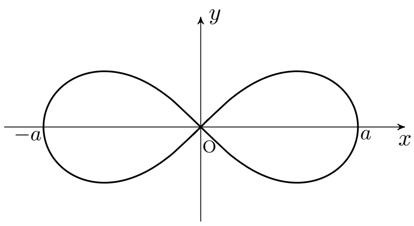
31.28 極座標で表示された次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ. $a > 0$ は定数である.

(1) 極座標で $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$,
　$\left(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{4}\right)$, （lemniscate, 連珠形）.

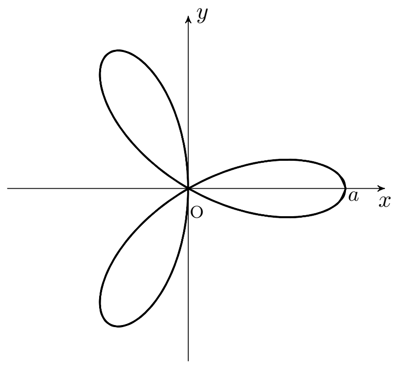
(2) 三葉形 $r = a\cos 3\theta$, $\left(-\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{2}\right)$.

(3) 四葉形 $r = a\cos 2\theta$, $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$.

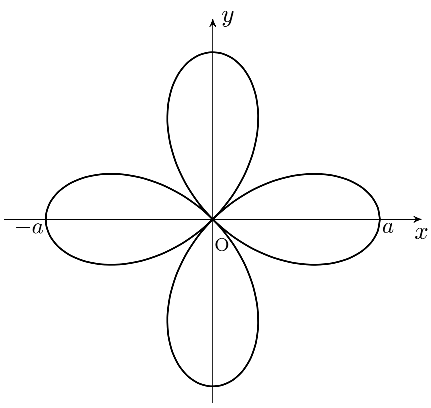
lemniscate



三葉形



四葉形



31.5.　広義積分

これまでは, 積分する区間は閉区間であつたが, 開区間を閉区間で近似することで, 開区間における積分を定義できる場合が多い. その様な積分を広義積分と総称する. これについて学ぶ. 以下の例を通して説明するに留める. .

例 31.29　$[1,\infty)$ での積分を $[1,M]$ における積分の $M\to\infty$ とした極限と定義する :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^M = \lim_{M\to\infty}\left(1-\frac{1}{M}\right) = 1.$$

これは, 積分範囲が無限区間であるといふ意味で広義の積分である.

例 31.30　函数が定義されてゐない点が積分区間の端点になつてゐる場合. この場合は, その点を外した少しだけ小さめの区間の積分を考へ, その区間を限りなく目的の区間に広げていつたときの極限と定める :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\,(1-\sqrt{\varepsilon}\,) = 2.$$

例 31.31　発散する広義積分の例を挙げておく.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty.$$

広義積分が（有限な値として）存在するとき, その広義積分は収束するといはれる.

演 習 問 題

31.32　次の広義積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx.$ 〔= 2.6 A2(2)〕

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x}\,dx.$ 〔= 2.6 A2(4)〕

(6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx.$ 〔= 2.6 A2(3)〕

(7) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx.$ 〔= 2.6 A2(5)〕

(8) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx.$ 〔= 2.6 A2(6)〕

(9) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx.$ 〔= 2.6 A2(8)〕

(10) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx.$ 〔= 2.6 A2(9)〕

(11) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$ 〔= 2.6 A2(9)〕

31.33　以下の計算は誤つてゐる. 正しく計算し直せ（収束するか否かも含めて）.
〔= p.113, $\ell\ell$. 1-4〕

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2.$$

31.34　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ. （Hint : 6.19 を利用して対数を求める. ）〔= 2.5 A1(4)〕

§ 32. Taylor の定理の別形, 函数の展開

32.1. Taylor の定理の別形

前期に学んだ Taylor の定理を別の角度から眺めてみたい.

定理 32.1 （積分型の剰余項による Taylor の定理） $f(x)$ が C^n 級（13.4 参照）の函数のとき,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j\,!}\,(x-a)^j + \hat{R}_n(x), \tag{32.2}$$
$$\text{但し } \hat{R}_n(x) = \hat{R}(x;a,f) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$$

が成り立つ. $\hat{R}_n(x)$ を <u>積分型の剰余項</u> と呼ぶ. また, 以下の便宜のために, (32.2) を a を中心とした n 次の<u>積分型の有限 Taylor 展開</u> と呼ぶことにする.

証明 $n=1$ のときは

$$\hat{R}_1(x) = \int_a^x f'(t)\,dt = \Big[\, f(t)\,\Big]_a^x = f(x) - f(a)$$

より正しい. また, n のとき成り立つとし, さらに $f(x)$ が C^{n+1} 級であれば,

$$\begin{aligned}
&\hat{R}_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \underset{\text{ビ}}{f^{(n)}}(t)(x-\underset{\text{セ}}{t})^{n-1}dt \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\Big[-f^{(n)}(t)\,\frac{1}{n}\,(x-t)^n \Big]_a^x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{1}{n}\,(x-t)^n dt \\
&= \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(t)(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)(x-a)^n + \hat{R}_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

である. ここで, $f(x)$ が C^{n+1} 級なので $f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n$ は定積分を持つことに注意せよ（30.1 と 30.3）. 以上から, 帰納法によつて主張は示された. □

注意 32.3 上記 32.1 では, 前期に学んだ Taylor の定理（14.1）と比べて, $f(x)$ について少し強い条件が課されてゐることに注意されたい.

注意 32.4 前期に学んだ Taylor の定理の剰余項 14.9 と比較することにより

$$\frac{1}{n\,!}\,f^{(n)}(c)\,(x-a)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \tag{32.5}$$

となる c が a と x の間に存在する.

例題 32.6 自然数 n と $x<1$ について, 次式を示せ.

$$\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \hat{R}_n(x), \quad \hat{R}_n(x) = \int_0^a \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^n}\,dt.$$

解答 $f(x) = \log(1-x)$ とすると, $f^{(j)}(x) = \dfrac{(j-1)!}{(1-x)^j}$, $(j=1,2,\cdots)$ であるから

$$f^{(j)}(0) = (n-1)!, \quad f^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!}{(1-t)^n}$$

となり, (32.2) から所望の式を得る. □

演 習 問 題

32.7 次の函数 $f(x)$ の 0 を中心とした n 次（n は自然数）の積分型の有限 Taylor 展開を求めよ. 剰余項 $\hat{R}_n(x)$ も明示せよ.
(1) $f(x) = \cos x$, （但し $n = 2m$ で m は自然数）.
(2) $f(x) = e^x$.
(3) $f(x) = \log(1 + x)$.

32.8 先に（前期に）Taylor の定理 14.1 を利用して 14.10 で Napier の数 e の近似値を計算した. そこでの計算を参考にして, ここでは 32.1 を $n = 10$ として使つて,

$$2.718281 < e < 2.718282$$

であることを示せ.

32.9 Taylor の定理 32.1 を使つて $\sin(1)$ を

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} = 0.841\dot{6}$$

で近似したとき, 小数第何桁まで正しいといへるか. 能(あた)ふ限り多い桁数を答へよ.

32.10 $A, B \in \mathbb{R}$ を含む区間 I で定義された連続函数 $F(t), G(t)$ があり, 任意の $t \in I$ について $G(t) \geqq 0$ であるか, または, 任意の $t \in I$ について $G(t) \leqq 0$ であるかのいづれかだとする. このとき, A と B の間に次の式を満たす c が存在することを示せ:

$$\int_A^B F(t)G(t)dt = F(c)\int_A^B G(t)dt.$$

（Hint: $A = B$ については明かである. A, B を端点とする区間で至るところ $G(t) = 0$ であれば所望の等式の両辺ともに 0 であつて正しい. まづ $A < B$ であり, $G(t) \geqq 0$ かつ区間 $[A, B]$ のどこかで $G(t) \neq 0$ である場合について証明する. このとき $\displaystyle\int_A^B G(t)dt > 0$ である. いま, 区間 $[A, B]$ における $F(t)$ の最小値を $F(a) = m$, 最大値を $F(b) = M$ とすると,

$$m\int_A^B G(t)dt \leqq \int_A^B F(t)G(t)dt \leqq M\int_A^B G(t)dt$$

が成り立つ. ここで $F(x)$ について, a と b を端点とする区間における中間値の定理を利用せよ. その他の場合も同様である. [41]） 〔= p.131 定理 2.8〕

32.11 $F(t) = f^{(n)}(t)$, $G(t) = (x - t)^{n-1}$ とおいて, 32.10 を用いて (32.5) の別証明を与へよ. 〔= p.131 ℓ. −7 – p.132 ℓ. 2〕

[41] ちなみに, A, B を端点とする区間において, 至るところ $G(t) \neq 0$ であれば, 函数 $x \mapsto \displaystyle\int_A^x F(t)G(t)\,dt$ と函数 $x \mapsto \displaystyle\int_A^x G(t)dt$ について, Cauchy の平均値の定理 8.18 を適用しても示せる.

32.2. 級数の項別微分, 項別積分

この節の目的は, §14 と §22 の続きとして, 積分を交へた内容を紹介することにある.

定理 32.12 収束半径 ρ をもつ整級数で与へられた函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

と任意の $x \in (a-r, a+r)$ について以下が成り立つ.
(1) 項別の微分ができる. 即ち,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (x-a)^{n-1} \tag{32.13}$$

が成り立ち, しかも右辺の整級数の収束半径は r である.
(2) 項別の積分もできる. 即ち,

$$\int_a^x f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \tag{32.14}$$

が成り立ち, しかも右辺の整級数の収束半径は r である.

証明 (1) は 20.18 に他ならない.
(2) 仮定より $\limsup\limits_{n\to\infty} 1\big/\sqrt[n]{|c_n|} = r$ であるが, 2.32 で示した通り $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ であるから, (32.14) の収束半径も r である. 一方, 各 $x_0 \in (a-r, a+r)$ について (32.13) が収束することと 20.3 (2) から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きい N をとれば, $|x-a| < |x_0 - a|$ なる限り

$$\left| \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n - f(x) \right| < \varepsilon$$

なので,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1} - \int_a^x f(x)\, dx \right| \\ &\leqq \left| \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n - f(x) \right) dx \right| \\ &\leqq \left| \int_a^x \varepsilon\, dx \right| = \varepsilon \cdot |x_0 - a|. \end{aligned}$$

よつて

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1} - \int_a^x f(x)\, dx \right| \\ &\leqq \varepsilon \cdot |x_0 - a| \end{aligned}$$

であるが, ε は任意なので左辺は 0 でなくてはならない. □

32.3. Taylor 展開 再論

32.2 の応用を含めて, 函数を冪級数で表すことを考へる. 以下では, 17.16 で述べて留保してあつた Newton の公式や Leibniz の公式についても述べる.
(〔= 2.5 B2〕, 〔= 2.8 B2〕)

ここで 22.1 を思ひ出しておく.

定義 22.1 函数 $f(x)$ は開区間 I において何度でも微分可能であるとする. $a \in I$ について (Taylor の定理に限らず) 一般に,

$$\mathsf{R}_n(x; a, f) = f(x) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right)$$

のことを $f(x)$ の a における n 次の剰余項と称する. 剰余項が

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{R}_n(x; a, f) = 0$$

なる性質を持つとき,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

と書ける. これを $f(x)$ の $x = a$ における Taylor 展開あるいは冪級数展開と呼ぶ. 伝統的に $a = 0$ の場合の Taylor 展開を Maclaurin 展開とも称する.

22.4 のときと同様に, 32.1 の型の有限 Taylor 展開の剰余項 $\hat{R}_n(x; a, f)$ を調べても

$$\lim_{n \to \infty} \hat{R}_n(x; a, f) = 0$$

であることがわかることがある. 以下に例を示すため, 次の事実も思ひ出しておく:

命題 22.3 実数 x を固定する. 次の式が成り立つ:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

例 32.15 例へば $f(x) = e^x$ の $x = 0$ における第 n 次剰余項 $\hat{R}_n(x)$ は

$$\begin{aligned}
|\hat{R}_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt \right| = \left| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x e^t (x-t)^{n-1} dt \right| \\
&\leqq \frac{1}{(n-1)!} e^{|x|} \left| \int_0^x (x-t)^{n-1} dt \right| \leqq \frac{1}{(n-1)!} e^{|x|} \left| \left[\frac{1}{n} (x-t)^n \right]_{t=0}^{x} \right| \\
&\leqq e^{|x|} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).
\end{aligned}$$

ここで, 最後の極限は 22.3 により示される. 以上より Taylor 展開

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots, \quad (x \in \mathbb{R})$$

を得る. これは 22.4 の最初の式の別証明である.

例 32.16 22.4 で述べたことを, 積分型の剰余項で述べ直してみる.
13.3 で示した様に

$$(\sin t)^{(j)}\big|_{t=0} = \sin\left(0 + \frac{j\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & (j \text{ が偶数のとき}), \\ (-1)^{k-1} & (j \text{ が奇数 } (=2k-1) \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから, 32.1 の記号で $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $n = 2m+1$ としたとき次が成り立つ:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \hat{R}_{2m+1}(x),$$

$$\begin{aligned} \left|\hat{R}_{2m+1}(x)\right| &= \left|\frac{1}{(2m)!}\int_0^x (-1)^m (x-t)^{2m}\cos t\,dt\right| \\ &\leqq \left|\frac{1}{(2m)!}\int_0^x (x-t)^{2m}\,dt\right| \quad (\because |\cos t| \leqq 1 \text{ と } 31.1(3)) \\ &\leqq \left|\frac{1}{(2m)!}\Big[(x-t)^{2m}\Big]_0^x\right| \leqq \left|\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right|. \end{aligned}$$

ここで, 22.3 より $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\hat{R}_{2m+1}(x) = 0$ がわかる. ゆえに,

$$\sin x \fallingdotseq x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{2m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1}$$

は m が大きい程よい近似を与へる. 14.10 (Napier の数 e の精密近似) と同じ様に, $\hat{R}_{2m+2}(x)$ を精密に評価することで $\sin x$ の精密な近似値を与へることができる (演習問題 32.9 を見よ). 同様のことが $\cos x$ についても成立する.

$\sin x$ の $x = 0$ における展開と同様な展開が $\cos x$ についても得られる.
以上の Maclaurin 展開を再度 (22.4 を参照) 列記しておく:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots, \tag{32.17}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots, \tag{32.18}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots. \tag{32.19}$$

例題 32.20 函数 $f(x) = \sin(3x)$ の Maclaurin 展開を求めよ.

解答 剰余項 $\hat{R}_{2m+1}(x)$ について, $n \longrightarrow \infty$ のとき, $|(-1)^m\cos(3x)| \leqq 1$ を考慮して,

$$\begin{aligned} \left|R_{2m+1}(x)\right| &= \left|\frac{1}{(2m)!}\int_0^x 3^{2m+1}(-1)^m\cos(3x)(x-t)^{2m}\,dt\right| \\ &\leqq \left|\frac{1}{(2m)!}\int_0^x 3^{2m+1}(x-t)^{2m}\,dt\right| = \left|\frac{(3x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right| \longrightarrow 0 \quad (n = 2m+1 \to \infty) \end{aligned}$$

であるから, Maclaurin 展開されることがわかる. 実際の展開は

$$\sin(3x) = 3x - \frac{3^3}{3!}x^3 + \frac{3^5}{5!}x^5 - \frac{3^7}{7!}x^7 + \frac{3^9}{9!}x^9 - \cdots$$

となる. □

$\tan x$ の高次導函数は複雑なので，これについての上と同様な考察は難しい[42]．また，一般には，Taylor の定理は万能ではなく，他の方法を援用する必要がある．実際に $f(x)=\tan^{-1}x$ の $x=0$ おける展開について述べてみる．14.1（高次導函数による）の方法でも 32.1（積分型）の方法でもうまく行かないが，以下の方法だとうまくいく．

例題 32.21　次の函数の $x=0$ を中心とした冪級数展開を求めよ．但し $|x|\leqq 1$ とする．

$$\tan^{-1}x.$$

〔= p.67 1.11A 4(2)〕

解答　いま，等式 21.16 〔= p.67 1.11A 1(2)〕

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\frac{z^{n+1}}{1-z}\quad (z\neq 1)$$

に $z=-t^2$ を代入すると

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^n t^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

を得る．これは任意の t について正しい．これを $t=0$ から x まで積分 (32.12) して

$$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

となる．最後の項について

$$\left|\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|=\int_0^{|x|}\left|\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right|dt=\int_0^{|x|}\frac{|t|^{2n+2}}{1+t^2}dt$$
$$<\int_0^{|x|}|t|^{2n+2}dt=\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}. \tag{32.22}$$

ここで $|x|\leqq 1$ ならば（$|t|\leqq 1$ のとき $-t^2\neq 1$ に注意）

$$\leqq\frac{1}{2n+3}\longrightarrow 0\quad (n\to\infty).$$

従つて

$$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\qquad(|x|\leqq 1) \tag{32.23}$$

が成り立つ．□

読者には，Taylor の定理 14.1 や 32.1 を使つて (32.23) を導けるか否かを試て欲しい．この他にも，実用上は重要であるにも拘らず，Taylor の定理から直ちに導くことは困難な冪級数展開が多く存在する．

注意 32.24　Machin の公式 5.10 と上の評価 (32.22) を併用すると，円周率 $\pi=3.141592\cdots$ の精密近似値計算が可能である．

---

[42] この話題について，荒川恒男 他 著：『ベルヌーイ数とゼータ関数』（牧野書店）を参照されたい．

例題 32.25 次の展開が成り立つことを 32.6 を用ゐて示せ（22.13 と比較せよ）.

$$\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad (-1 \leqq x < 1).$$

解答 32.6 の剰余項 $\hat{R}_n(x)$ について調べる.

(i) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき：$(x \leqq)\, t \leqq 0$ のときは $1-t \geqq 1$ だから, $n \to \infty$ のとき

$$\left|\hat{R}_n(x)\right| = \int_x^0 \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^n}\,dt \leqq \int_x^0 (x-t)^{n-1}\,dt = \frac{x^n}{n} \leqq \frac{1}{n} \to 0.$$

(ii) $0 < x < 1$ のとき：$0 \leqq t \leqq x$ のときは $0 \leqq \dfrac{x-t}{1-t} \leqq x$ だから, $n \to \infty$ のとき

$$\left|\hat{R}_n(x)\right| = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^{n-1} \frac{1}{1-t}\,dt \leqq x^{n-1} \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt \leqq \frac{x^{n-1}}{1-x} \cdot x \to 0.$$

(iii) 以上から与式は成り立つ. □

例題 32.26 $|x| \leqq 1$ のとき, 次の展開が成り立つことを示せ：

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

解答 22.10 を $\alpha = \frac{1}{2}$ として用ゐると $|z| < 1$ のとき,

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} z + \binom{-\frac{1}{2}}{2} z^2 - \binom{-\frac{1}{2}}{3} z^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{4} z^4 - \cdots.$$

ここで $z = x^2$ を代入して, 0 から x まで（32.12(2) を適用して）項別積分すると

$$\sin^{-1} x = x - \binom{-\frac{1}{2}}{1} \frac{x^3}{3} + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \frac{x^5}{5} - \binom{-\frac{1}{2}}{3} \frac{x^7}{7} + \binom{-\frac{1}{2}}{5} \frac{x^9}{9} - \cdots$$

となつて所望の等式を得る. $x = \pm 1$ の場合を示すのには準備が必要なので, 後に 32.33 で証明する. □

ここまでに得られた基本函数の Maclaurin 展開を再度まとめておく.

(32.27) $$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots, \quad (\alpha \text{ は定数.}\ |x| < 1).$$

（但し $x = 1$ かつ $\alpha > -1$, または, $x = -1$ かつ $\alpha > 0$ でも成立. 22.12 参照）.

(32.28) $$\sin^{-1} x = x - \binom{-\frac{1}{2}}{1} \frac{x^3}{3} + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

（$|x| \leqq 1$）（32.26, 32.33 参照）.

(32.29) $$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad (|x| \leqq 1) \text{（32.21 参照）}.$$

(32.30) $$\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad (-1 \leqq x < 1) \text{（32.25 参照）}.$$

ここで, 一般 2 項係数 $\dbinom{\alpha}{r}$ は (22.8) で定義した.

注意 32.31　繰り返しになるが, 多くの場合, 項別微分や項別積分が有効である. 例へば (32.25) で説明した (32.30) は, $|x| < 1$ のときは

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (\,|x| < 1\,)$$

に対して, 32.12(2) の項別積分を使つても得られる.

与へられた収束級数の和の値を知るのに便利な方法を紹介する.

定理 32.32★　(Abel の連続性定理) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するとする. このとき x を変数とした冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

の収束半径は 1 以上である (20.3 を見よ) が, さらに次が成り立つ:

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

証明　a_0 の値を変更することにより $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ と仮定してよい. $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ とおく. このとき $a_0 = s_0$, $a_n = s_n - s_{n-1}$ ゆゑ,

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\
&= s_0 + (s_1 - s_0)x + (s_2 - s_1)x^2 + \cdots + (s_n - s_{n-1})x^n \\
&= s_0(1-x) + s_1(x - x^2) + s_2(x^2 - x^3) + \cdots + s_{n-1}(x^{n-1} - x^n) + s_n x^n \\
&= (1-x)\bigl(s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \cdots + s_{n-1}x^{n-1}\bigr) + s_n x^n.
\end{aligned}$$

$s_n \to 0$ ゆゑ, 任意に $\varepsilon > 0$ をとるとき, 番号 N が存在して, $n > N$ ならば $|s_n| < \varepsilon$ となる. このとき $|x| < 1$ である限り

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| = \lim_{n\to\infty} |s_n(x)| &= \left|(1-x)\left(\sum_{k=0}^{N} s_k x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} s_k x^k\right)\right| \\
&\leqq \left|(1-x)\sum_{k=0}^{N} s_k x^k\right| + \left|(1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty} s_k x^k\right| \\
&\leqq \left|(1-x)\sum_{k=0}^{N} s_k x^k\right| + \varepsilon\left|x^{N+1}\right|.
\end{aligned}$$

さらに $x \to 1-0$ とすれば

$$\lim_{x\to 1-0}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leqq \varepsilon.$$

しかるに ε は任意なので左辺は 0 である. これで証明は完了した. □

上記の s_n を係数とする冪級数への式変形は Abel の総和法と呼ばれる.

Abel の連続性定理 32.32 の応用を 1 つ述べておく.

例題 32.33 次の等式（Newton の公式）を証明せよ：〔= 2.8 B2〕

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&\left(=\sin^{-1}1=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &=1+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{5\cdot 2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{7\cdot 2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{9\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots.\end{aligned}\tag{32.34}$$

解答 （[8a], §2.37, pp.240–241）まづ, 積分の公式 28.8 の 10 と Taylor 展開 (32.28) より $|x|<1$ ならば次の等式が成り立つ：

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sin^{-1}x=x+\frac{1}{3\cdot 2}x^3+\frac{1\cdot 3}{5\cdot 2\cdot 4}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{7\cdot 2\cdot 4\cdot 6}x^7+\cdots.$$

ここで, 右辺の第 n 部分和を $S_n(x)$ とおくと, $0<x<1$ のときは各項が正なので,

$$S_n(x)<\sin^{-1}(x)<\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}.$$

$S_n(x)$ は多項式なので連続であるから, 6.13 により

$$S_n(1)=\lim_{x\to 1-0}S_n(x)\leqq\frac{\pi}{2}.$$

数列 $\{S_n(1)\}$ は単調増加であるから, それは 3.4 によつて収束する. ここで Abel の連続性定理 32.32 を使へば, (32.34) は収束し, その値は $\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$ である. これで, 留保してゐた 32.26 の証明の残りの部分が示された. □

次の等式は特に有名なものなので, ここに明示しておく.

例題 32.35 次の等式（Leibniz の公式）を証明せよ：〔= 2.5 B2〕

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots.$$

解答 等式 (32.29) で $x=1$ とすればよい. ちなみに, 与式の右辺は, それの項がなす数列が 0 に収束する交代級数であるから 17.11 によつても, 収束することはわかる. □

演 習 問 題

32.36 次の函数 $f(x)$ は任意の x について Maclaurin 展開できる. それを既知として, $f(x)$ の Maclaurin 展開を求めよ.

(1) $f(x)=\cos(2x)$. (2) $f(x)=\sin^2 x$. (3) $f(x)=e^{x^2}$.

32.37 次の函数 $f(x)$ は記載した x の範囲で Maclaurin 展開できる. それを既知として, $f(x)$ の Maclaurin 展開の x^3 の項までを求めよ.

(1) $f(x)=\sin(2x)+\cos x,\quad(-\infty<x<\infty)$.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x},\quad(|x|<\frac{\pi}{2})$. 〔= 2,8 A1(4)〕

(3) $f(x)=e^x\sin x,\quad(-\infty<x<\infty)$. 〔= 2.8 A1(1)〕

(4) $f(x)=\sqrt{1+x},\quad(-1<x<1)$.

§ 33.　曲線の長さ

33.1.　陽函数表示の場合の曲線の長さ

曲線の長さを論じる前に曲線の定義を明確にする必要があるが, ここでは常識的な理解で進むことにする. 厳密な定義は後の 41.1 にて述べる.

閉区間 $[a, b]$ おいて連続で, 開区間 (a, b) で微分可能な函数 $f(x)$ に対して, 曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さとは何かを考察し, それを求めたい. まづ, 閉区間 $[a, b]$ を小区間に分割する：

$$\varDelta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

この各区間に属する曲線の部分を, 端点を結ぶ線分の長さで置き換へて, それらの総和

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \bigl(f(x_i) - f(x_{i-1})\bigr)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

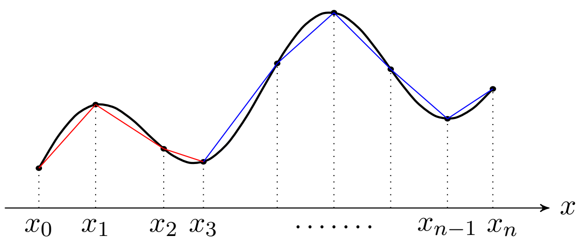
の $|\varDelta| \to 0$ としたときの極限値が, 以下で示す様に存在する. これを曲線 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における長さと呼ぶ.[43]　ここで §30.1 と同様, $|\varDelta| = \max\{\, x_i - x_{i-1} \mid 1 \leqq i \leqq n\}$ （小区間の幅の最大値）である. 平均値の定理により, 各 i について,

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad \xi_i \in (\, x_{i-1},\ x_i\,)$$

なる ξ_i が存在する. それゆゑ, 30.1 によつて, 上の総和の $|\varDelta| \to 0$ のときの極限が存在し, それは (30.3) を通して

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

で与へられる. 以上をまとめておく：



定理 33.1　区間 $[a, b]$ で定義され, そこで連続で, 区間 (a,b) で C^1 級である函数 $f(x)$ について, 曲線 $C : y = f(x)$ の長さ $\ell(C)$ は次で与へられる：

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

例題 33.2　放物線 $C : y = x^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さ $\ell(C)$ を求めよ.

解答　33.1 より

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}}\, dx$$

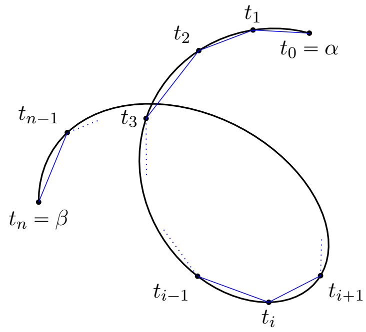
であるが, この値は 31.12 で計算した通り $\dfrac{1}{4}\log(\sqrt{5} + 2) + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ である.　□

[43] これが定義なのか定理なのかは意見が分かれるかも知れないが, ここでは定義として進める.

33.2. 媒介変数表示された曲線の長さ

ここでは, 33.1 よりも一般的に表示された曲線の長さを与へる公式を説明する.

区間 $[\alpha, \beta]$ で定義され, この区間で連続で, 区間 (α, β) で C^1 級の 2 つの函数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ が与へられたとする. このとき, 直交座標に関して媒介変数を使つて表される曲線



$$C = \{\,(x, y) \,|\, x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ \ t \in [\,\alpha, \beta\,]\,\}$$

の長さ $\ell(C)$ は以下の様に定義される.

閉区間 $[\,\alpha, \beta\,]$ を小区間に分割する:

$$\Delta : \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta,\quad [\alpha, \beta] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{n-1}, t_n].$$

各小区間に属する曲線の部分の長さを, その端点を結ぶ線分の長さで置き換へて, 総和

$$\ell(C, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}$$

を考へる. ここで $|\Delta| = \max\{\, t_i - t_{i-1} \,|\, 1 \leqq i \leqq n\,\}$ (小区間の幅の最大値, §30.1 参照) とおくと, $|\Delta| \to 0$ のとき, 上記の和が極限値をもつことが次 page の証明 2 で示されるが, その極限値を曲線 C の長さと呼び $\ell(C)$ で表す:

$$\ell(C) = \lim_{|\Delta| \to 0} \ell(C, \Delta). \tag{33.3}$$

もちろん, これは 33.1 の場合を含めた定義になつてゐる.

命題 33.4 上の曲線 C の長さ $\ell(C)$ は次の式で表される:

$$\ell(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

初めに特殊な場合について 33.1 を用ゐて証明し, 次 page で本格的な証明を与へる.

証明 1 まづ, 区間 $[\alpha, \beta]$ において $\varphi'(t) \neq 0$ である場合を考察する. この場合, この区間で常に $\varphi'(x) > 0$ または常に $\varphi'(x) < 0$ なので, 逆函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が存在し,

$$\big(\varphi(t), \psi(t)\big) = (x, y) \iff y = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = f(x)$$

となる函数 $f(x)$ が存在する. さらに 9.8 (媒介変数表示による導函数) より

$$f'(x) = \psi'(t)/\varphi'(t).$$

t が α から β まで変化するとき x が $\varphi(\alpha)$ から $\varphi(\beta)$ まで変化し,

$$\ell(C) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\, \frac{dx}{dt}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

また, $[\alpha, \beta]$ において $\psi'(t) \neq 0$ である場合も, x 座標と y 座標の役割を入れ替へれば上と同様にできる. もし区間 $[\alpha, \beta]$ において, $\varphi'(t) = 0$ となる点が有限個しかないのであれば, 曲線をそれらの点で切断して, 広義積分 31.5 や積分区間の分割の公式 30.10 を用ゐれば, 所望の公式が得られる. □

次に本格的な証明を記しておく.

証明 2　以下の様にして, 極限値 (33.3) が存在し (33.4) の積分で与へられることがわかる. まづ, 8.6（平均値の定理）により, 各 i について,

$$\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}=\varphi'(\xi_i),\quad \frac{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}=\psi'(\xi_i);\quad \xi_i,\ \eta_i\in(\,t_{i-1},\ t_i\,)$$

なる ξ_i, η_i が存在する. ゆゑに, $1\leqq i\leqq n$ に渡る和をとれば,

$$\ell(C,\varDelta)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\eta_i)^2}\,(t_i-t_{i-1}).$$

これを

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi(\xi_i)^2}\,(t_i-t_{i-1})\quad\left(\text{或いは}\ \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'(\eta_i)^2+\psi(\eta_i)^2}\,(t_i-t_{i-1})\right)$$

と比較したい. 3 点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(\varphi(\xi_i),\psi(\eta_i))$, $\mathrm{B}(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))$ を頂点とする三角形について, 3 辺の辺の長さの関係 $\left|\mathrm{OB}-\mathrm{OA}\right|\leqq\mathrm{AB}$（三角不等式）から,

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi(\xi_i)^2}-\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi(\eta_i)^2}\right|&\leqq\sqrt{0^2+(\varphi(\xi_i)-\psi(\eta_i))^2}\\&=\left|\psi(\xi_i)-\psi(\eta_i)\right|\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\text{(33.5)}\quad \left|\ell(C,\varDelta)-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi(\xi_i)^2}(t_i-t_{i-1})\right|\leqq\sum_{i=1}^{n}\left|\psi(\xi_i)-\psi(\eta_i)\right|(t_i-t_{i-1}).$$

ここで

$$M(\varDelta)=\max\left\{\left|\psi(\tau_i)-\psi(\tau_i')\right|;\tau_i,\tau_i'\in[t_{i-1},t_i],1\leqq i\leqq n\right\}$$

とおく. $\psi(t)$ が連続函数であることから, これが存在することと $M(\varDelta)\to0$ $(|\varDelta|\to0)$ であることが従ふ. ゆゑに,

$$\text{(33.6)}\quad \text{“(33.5) の右辺”}\leqq M(\varDelta)\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=M(\varDelta)\,(\beta-\alpha)\to0\quad(|\varDelta|\to0)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}&\left|\ell(C,\varDelta)-\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt\right|\\&\qquad\leqq\left|\ell(C,\varDelta)-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi(\xi_i)^2}\,(t_i-t_{i-1})\right|\\&\qquad\quad+\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi(\xi_i)^2}\,(t_i-t_{i-1})-\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt\right|\end{aligned}$$

であるが, $|\varDelta|\to0$ のとき, これの右辺の第 1 項は (33.6) より 0 に収束し, 第 2 項も 30.1 と (30.2) により 0 に収束するから, 左辺が 0 に収束する. 即ち

$$\ell(C)=\lim_{|\varDelta|\to0}\ell(C,\varDelta)=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$$

である. これで主張は証明された. □

注意 33.7 証明 1 では特殊な場合に限つたが, 33.1 を使つて 33.4 を証明してゐる. 一方, 証明 2 では 33.1 を用ゐてをらず, 33.4 において $\varphi(t)=t$ の場合, この公式は 33.1 に他ならないから, 証明 2 には 33.1 の証明が含まれてゐることになる.

例題 33.8 曲線 $x=t\cos t$, $y=t\sin t$ の $0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$ に対応する部分の長さを求めよ.

解答 (33.4) により求める長さは

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}\,dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\,\right)\right)\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(2\sqrt{3} + \log(\sqrt{3}+2)\right) = \sqrt{3} + \log(\sqrt{3}+1) - \tfrac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

となる. □

演 習 問 題

33.9 次の曲線 C の長さ $\ell(C)$ を求めよ. 但し, $a>0$ は定数である.

(1) 放物線の一部 $C: y=x^2$, $(0 \leqq x \leqq \sqrt{2}\,)$.

(2) 懸垂線の一部 $C: y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $(-2 \leqq x \leqq 2\,)$.

(3) Cycloid $C: x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$.

(4) Asteroid（星芒形） $C: x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$, $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$.

33.3. 極座標で表示された曲線の長さ

さらに極座標によつて表示された曲線の長さは, 次の様に与へられる.

命題 33.10 函数 $f(\theta)$ は区間 $[a,b]$ で定義された連続函数で, 区間 (a,b) で C^1 級であるとする. 極座標によつて $r=f(\theta)$, $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ と表される曲線 C の長さ $\ell(C)$ は次の式で与へられる :

$$\ell(C)=\int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta. \tag{33.11}$$

証明 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ だから

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$$

となる. このとき

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=f(\theta)^2+f'(\theta)^2$$

なので, 33.4 より与式を得る. □

例題 33.12 極座標で $r=\theta$ と表される曲線（Archimedes(アルキメデス) の螺旋(らせん)）の $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ における長さを求めよ.

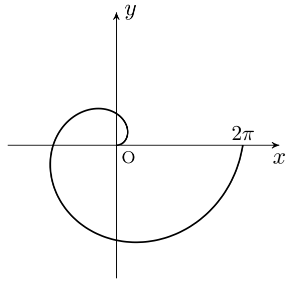
解答 $\frac{dr}{d\theta}=1$ なので, (33.11) により

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{\theta^2+1}+\log\left(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right)\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\tfrac{1}{2}\log\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)$$

となる. □



演 習 問 題

33.13 極座標によつて表された次の曲線 C の長さ $\ell(C)$ を求めよ. 但し, $a>0$ は定数である.

(1) Cardioid（心臓形） $C:\ r=a(1+\cos\theta)$, $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$.

(2) 等角螺旋(らせん) $C:\ r=e^{-a\theta}$, $(0\leqq\theta<\infty)$. （Hint : 広義積分の考へ方を応用する. ）

第 6 章　重積分

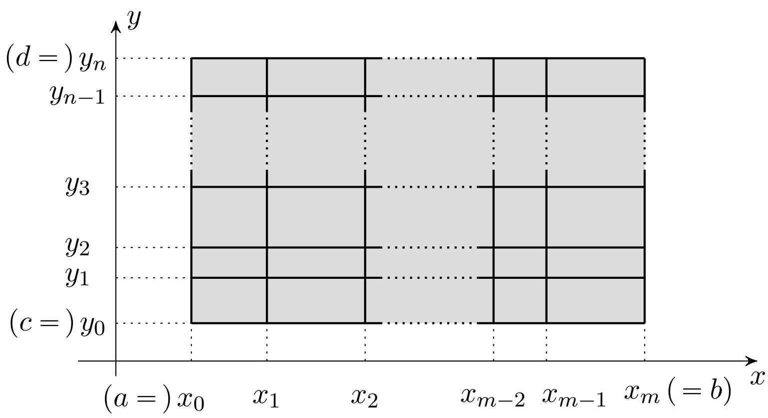
§ 34.　重積分の定義と性質

34.1.　基本的な事項

長方形領域. 実定数 a, b, c, d について, 座標平面 $\mathbb{R}^2$ 内の

$$R = \{\,(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x \leqq b,\ c \leqq x \leqq d\}$$

なる部分集合を 長方形領域 と呼ぶ.



長方形領域の分割. 上の R を定める a, b, c, d について, 区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ を

$$\Delta_x \ :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$
$$\Delta_y \ :\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

の様に分割して, それに応じて R を図の様に小さい mn 個の長方形領域に分ける. 境界が重なり合うが, それは気にしなくて良いことがあとでわかる. この様な平面上の領域の 分割 にも記号を用ゐることとし, ここでは Δ と表す. さらに, 小長方形を表す記号を用意する：

$$\Delta_{ij} = \{\,(x, y) \,|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\ y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\,\}.$$

長方形領域の分割の幅. 上の分割 Δ について,

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|,\quad \Delta y_j = |x_j - y_{j-1}|$$

と記す. このとき Δ_{ij} の面積は $\Delta x_i \Delta y_j$ である. また

$$|\Delta| = \max\{\,|\Delta x_i|,\ |\Delta y_j|\,;\, 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\,\}$$

（つまり mn 個の小長方形の辺の最大値）と書いて, これを Δ の 幅 と呼ぶ.

分割の細分.　1 つの長方形領域 R に対する 2 つの分割 Δ と Δ' について, 分割 Δ の任意の小長方形領域が分割 Δ' のいくつかの小長方形領域の合併になつてゐるとき, 分割 Δ' は Δ の 細分 と呼ぶ.

長方形領域における“定積分”. 以下の様に 1 変数の場合と同じ考へ方で 2 変数の場合の“定積分”を定義する．上の長方形領域 R を含む領域で定義された函数 $f(x,y)$ が与へられたとき, 各 (i,j) について任意に $\mathrm{P}_{ij} \in \Delta_{ij}$ をとり固定する．さらに

$$M_{ij} = \sup\{\,(x,y) \mid f(x,y)\,;\,(x,y) \in \Delta\,\},\quad m_{ij} = \inf\{\,(x,y) \mid f(x,y)\,;\,(x,y) \in \Delta\,\}$$

と定め, 次の様な 3 種類の和

$$m(f,\Delta) = \sum_{(i,j)} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j, \qquad M(f,\Delta) = \sum_{(i,j)} M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j,$$
$$S(f,\Delta) = \sum_{(i,j)} f(\mathrm{P}_{ij})\,\Delta x_i \Delta y_j$$

を考へる．もちろん, 第 2 の和は P_{ij} の選び方に依存する．これらの和の間には

$$m(f,\Delta) \leqq S(f,\Delta) \leqq M(f,\Delta)$$

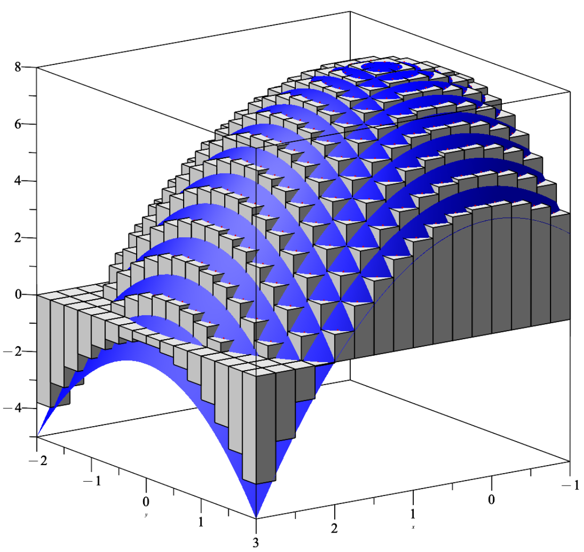
なる大小関係がある．定義から, 分割 Δ をその細分で置き換へると, 左辺は増加し, 右辺は減少する．ここで, 任意の 2 つの分割に対して, その双方の分割の細分になつてゐる第 3 の分割が存在する（双方の刻み方を重ねた刻み方にすればよい）．もし, $|\Delta| \to 0$ のときの左辺と右辺の極限（左辺の上限と右辺の下限）が存在し, かつ, それら極限値が一致するとき,（例へば $f(x,y)$ が R を含む開領域において連続であれば, $\max\{M_{ij} - m_{ij}\}$ 極限が 0 なので, さうなる）

(34.1)
$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f,\Delta)$$

なる極限が存在する．これは各小長方形に属する点の集合 $\{\mathrm{P}_{ij}\}$ のあらゆる選び方を想定した上での極限である．もし, この極限を（1 変数の場合と同様な考へ方に基き）長方形領域 R における函数 $f(x,y)$ の積分であると考へて, 次の記号で表す：

(34.2)
$$\iint_R f(x,y)\,dxdy.$$

図 34.3　重積分の定義



中段に描かれてゐる 1 枚の水平な長方形は xy 平面にあり, それが領域 R である．その中に細かく敷き詰められてゐる正方形の 1 つ 1 つが Δ_{ij} を表してゐる．

引用のために以上をまとめておく.

定義と命題 34.4 （重積分）以上の記号にもとで, 極限

$$\lim_{|\varDelta|\to 0} S(f,\varDelta) = \iint_R f(x,y)dxdy \tag{34.5}$$

が存在するとき, 函数 $f(x,y)$ は領域 R で重積分可能であるといひ, それを函数 $f(x,y)$ の R 上の重積分と称する. もし $f(x)$ が R 上の連続函数であれば, $f(x)$ は R 上で重積分可能である.

ここで, 注意すべきことがある. 1 変数のときは区間 $[a,b]$ で積分するといつても, 積分の下端を a, 上端を b とするのと, 積分の下端を b, 上端を a とするのとでは, 結果の値の符号が逆転する. 2 変数の場合も, R にも 向きの様なもの があることに留意しなくてはならない. このことは以下でも折に触れて述べる.

注意 34.6 重積分の直観的な説明 （まづは, ここの説明がわかることが先決）図 34.3 を見ていただきたい. 水平面が 1 枚だけ描かれてゐるが, それは xy 平面である. ところどころに見える滑らかな曲面が $z=f(x,y)$ の graph S の概形である. 多くの柱（直方体）があるが, 一つ一つは丁度 $\varDelta_{ij}$ の上下に立つてゐる. その柱の高さは, 各 $\varDelta_{ij}$ のどこかに（図では中央に）選ばれてゐる P_{ij} における値 $f(\mathrm{P}_{ij})$ である. これらの直方体の体積の和が (34.1) に他ならない. 但し, $f(\mathrm{P}_{ij})$ が負の値であれば, そこに立つ柱の体積を負として勘定してゐる. 以上のことから, (34.2) は, 曲面 S と xy 平面の間にある部分の体積を表してゐると考へるのが妥当であるが, xy 平面よりも下にある部分の体積は負の値で勘定されるので, これを符号付き体積と呼ぶことにする. つまり, 直観的には $\boxed{\textbf{重積分}} = \boxed{\textbf{符号付き体積}}$ である.

注意 34.7 ここで, 重積分は符号つきの体積である, と述べたが, 厳密には「体積とは何か」を定めておかなくてはならない. 一般的な方法で体積を定義するのには, 通常は 3 重積分を使ふ. それは 38.1 において述べる.

ここまでで, 長方形領域における重積分が一通り定義された. 次に, 定義域が長方形ではない（一般の有界集合の）場合について, 説明する.

定義 34.8 （有界集合上での重積分）ある長方形領域に含まれる様な $\mathbb{R}^2$ の部分集合を有界集合と呼ぶ. 無限に広がつてゐる様な部分集合は有界領域ではない. D を有界集合とし, それを含む長方形集合を R とせよ. D を定義域とする関数 $f(x,y)$ について, $(x,y)\notin D$ の場合は, $f(x,y)=0$ と定めることで, 定義域を R に拡張する. さうしておいて, 次式の右辺が存在するときに

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy$$

と定める. この場合も, 函数 $f(x,y)$ は領域 D で積分可能であるといひ, それを函数 $f(x,y)$ の D 上の重積分と称する.

ここで, 面積を“再定義”しておく.

定義 34.9 上の記号で, 定数函数 1 が D で積分可能であるとき, 即ち, 重積分

$$\iint_D 1\,dx\,dy$$

が存在するとき, これを D の<u>面積</u>と呼び, そのことを D は<u>面積確定</u>であるといふ.

注意 34.10 D 上の一般の $f(x,y)$ 函数の重積分を考察する際に, D に対して補助的に長方形 R を用意した. R の分割 Δ について, その際に, 上の記号で, D と共有点を有する小長方形 Δ_{ij} に渡る面積の総和が $|\Delta| \to 0$ のときに限りなく 0 に近づくことが重要である（これに反する領域が存在する）. 34.9 は, そのことを述べたに過ぎない.

次は重積分の定義から簡単にわかることなので証明しない.

命題 34.11 共通な内点を持たない 2 つの有界な領域 D_1 と D_2 があり, $D_1 \cup D_2$ 上で定義された函数 $f(x,y)$ が D_1 上でも D_2 でも積分可能であれば, $D_1 \cup D_2$ 上でも積分可能であつて

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

が成り立つ.

定理 34.12 （重積分の線形性）D を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする. 以下の積分の値が存在する様な $f(x,y)$ と $g(x,y)$, および, 実定数 c について, 以下の等式が成り立つ.

(1) $\displaystyle\iint_D \big(f(x,y) + g(x,y)\big)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy.$

(2) $\displaystyle\iint_D c\,f(x,y)\,dxdy = c\iint_D f(x,y)\,dxdy.$

証明 31.1 の別証と同様な考へ方で示されるので省略する. □

命題 34.13 領域 D 内の任意の点 (x,y) において, $f(x,y) \geqq 0$ であれば,

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geqq 0$$

である. 等号は D 上の至るところで $f(x,y) = 0$ のときにのみ成立する.

注意 34.14 領域 D にも“向き”を考へ得る. その場合は 34.13 は修正が必要となる.

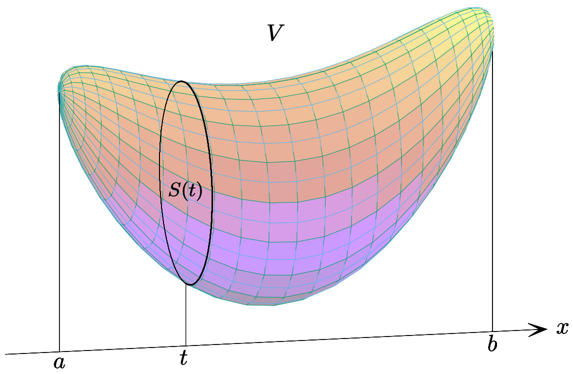
§ 35. 累次積分

ここからは, 重積分を実際にどう計算するかを述べていく.

累次積分の基礎となる直観的な理解.

重積分を計算する際に重要なのが, 累次積分であるが, その精密な説明に入る前に予備的に, 直観的な説明をしておく. xyz 空間内に置かれた図の様な立体 V の体積 $\mathrm{vol}(V)$ を計算したい. 但し, 任意の $a \leqq t \leqq b$ に対し, 平面 $x = t$ による断面 $S(t)$ がわかつてゐるとする. つまり, 函数 $x \mapsto S(x)$ が与へられてゐるとする. このとき, 直観的には (定積分の定義 (30.3) により) 次が成り立つ:

$$\boxed{(35.1) \qquad \mathrm{vol}(V) = \int_a^b S(x)\,dx.}$$



ここでは, やや粗い議論ではあるが, 次の様に理解しておく. まづ V のうち, 2 平面 $x = a$ と $x = c$ の間に存在する部分の体積を $V(c)$ と書くことにする. このとき,

$$V(a) = 0, \quad V(b) = \mathrm{vol}(V).$$

次に $a \leqq c \leqq c + h \leqq b$ となる c と h を用意する. ここで h は “小さい” とすると,

$$V(c+h) - V(c) \fallingdotseq S(c)h$$

であるが, この近似式は単に両辺が近いといふだけではなく,

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(c+h) - V(c)}{h} = S(c)$$

が成り立つといふことでもある. c は変化するから, この式は

$$\frac{d}{dx} V(x) = S(x)$$

を意味する. つまり $V(x)$ は $S(x)$ の原始函数の 1 つである. しかも $V(a) = 0$ なので,

$$V(x) = \int_a^x S(t)\,dt$$

である. $x = b$ とすれば, 所望の式が得られる. $\left(\int_a^b S(t)\,dt = \int_a^b S(x)\,dx \text{ に注意.} \right)$

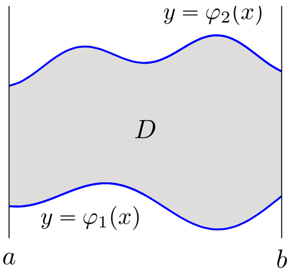
定理 35.2　（累次積分法）区間 $[a,b]$ において，函数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ は連続であるとし，この区間で常に $\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$ が成り立つとする．領域

$$D = \{\,(x,y)\,|\,\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x),\ a \leqq x \leqq b\,\}$$

を定義域とする函数 $f(x,y)$ は D で 連続な函数ならば，D 上で重積分可能であり，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \tag{35.3}$$

が成り立つ．



証明　D を含む長方形領域

$$\widetilde{D} = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$$

を 1 つ固定し，$\widetilde{D}$ の分割 $\varDelta$ を

$$\varDelta\ :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

とする．$f(x,y)$ の定義域を $\widetilde{D}$ に拡張し，$(x,y) \notin D$ のときは $f(x,y) = 0$ と定める．各小領域 $\varDelta_{ij} = [\,x_{i-1}, x_i\,] \times [\,y_{i-1}, y_i\,]$ について

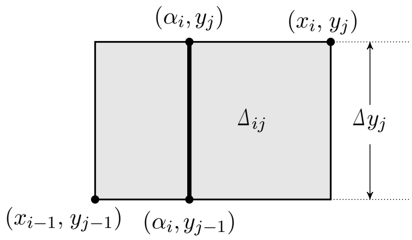
$$m_{ij} = \min\{\,f(x,y)\,|\,(x,y) \in \varDelta_{ij}\,\}, \quad M_{ij} = \max\{\,f(x,y)\,|\,(x,y) \in \varDelta_{ij}\,\}$$

とおく（$f(x,y)$ は連続だから最大値と最小値が存在する）．以下 $\varDelta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\varDelta y_j = y_j - y_{j-1}$ と記す．$\varDelta_{ij}$ の面積は $\varDelta x_i \varDelta y_j$ である．また，各 $\alpha_i \in [\,x_{i-1}, x_i\,]$ をとり固定し，

$$m_j(\alpha_i) = \min\{\,f(\alpha_i, y)\,|\,y \in [\,y_{j-1}, y_j\,]\,\},$$
$$M_j(\alpha_i) = \max\{\,f(\alpha_i, y)\,|\,y \in [\,y_{j-1}, y_j\,]\,\}$$

とおく．このとき

$$m_j(\alpha_i) \leqq f(\alpha_i, y) \leqq M_j(\alpha_i).$$



ゆえに

$$m_{ij}\,\varDelta y_j \leqq m_j(\alpha_i)\,\varDelta y_j \leqq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\alpha_i, y)\,dy$$
$$\leqq M_j(\alpha_i)\,\varDelta y_j \leqq M_{ij}\,\varDelta y_j.$$

これを $j = 1, \cdots, n$ について総和すると

$$\sum_j m_{ij}\,\varDelta y_j \leqq \int_c^d f(\alpha_i, y)\,dy \leqq \sum_j M_{ij}\,\varDelta y_j. \tag{35.4}$$

ここで

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

をおくと (35.4) は

$$\sum_j m_{ij}\,\varDelta y_j \leqq F(\alpha_i) \leqq \sum_j M_{ij}\,\varDelta y_j$$

と書ける．これに $\varDelta x_i$ を掛けたものを $i=1,\cdots,m$ について総和すると

$$\sum_i\sum_j m_{ij}\,\varDelta x_i\varDelta y_j \leqq \sum_i F(\alpha_i)\,\varDelta x_i \leqq \sum_i\sum_j M_{ij}\,\varDelta x_i\,\varDelta y_j.$$

ここで, 分割を限りなく細かく（つまり $|\varDelta|\to 0$）する．ここで, 領域 D は 1 変数のときの定積分から面積が定まるため, 曲線 $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ および 2 直線 $x=a$, $x=b$ と共有点を有する小分割長方形の面積の和は限りなく 0 に近づく（ここが重積分が確定するか否かの大切な論点）．それゆゑ, その部分の項 $m_{ij}\,\varDelta x_i\varDelta y_j$ や $M_{ij}\,\varDelta x_i\varDelta y_j$ は無視して構はなくて, 左右の辺は重積分の定義 (34.5) より同一の重積分に収束する．一方, 中辺は 1 変数のときの定積分の定義 (30.3) により定積分で書けて, 結局

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \underset{\text{（上の左辺と右辺の }|\varDelta|\to 0\text{ での極限）}}{\iint_{\widetilde{D}} f(x,y)\,dx\,dy} = \int_a^b F(x)\,dx \qquad \text{（上の中辺の }|\varDelta|\to 0\text{ での極限）}$$

$$= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

を得る．同時に積分の可能性も示された． □

x を先に積分する累次積分についても述べておく．証明は 35.2 と全く同様にできるので省略する．

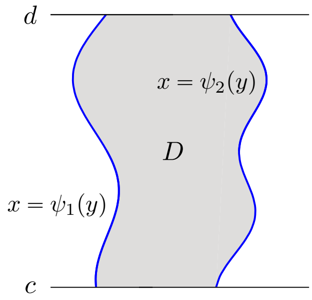
定理 35.5 （累次積分法）区間 $[c,d]$ において, 函数 $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ は連続であるとし, この区間で常に $\psi_1(y)\leqq\varphi_2(y)$ が成り立つとする．領域

$$D=\{\,(x,y)\,|\,\psi_1(y)\leqq x\leqq\psi_2(y),\ c\leqq y\leqq d\,\}$$

を定義域とする函数 $f(x,y)$ は D で 連続な函数ならば, D 上で重積分可能であり,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy \tag{35.6}$$

が成り立つ．



例題 35.7 領域 $D=\{\,(x,y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 3x\,\}$ について, 次の重積分を求めよ：

$$\iint_D (1-2x+2y)\,dx\,dy.$$

解答 累次積分によつて

$$\begin{aligned}
\text{（与式）} &= \int_0^1\left(\int_x^{3x}(1-2x+2y)\,dy\right)dx = \int_0^1\Big[\,y-2xy+y^2\,\Big]_x^{3x}dx \\
&= \int_0^1\left((3x-x)-2x(3x-x)+(3x)^2-x^2\right)dx = \int_0^1\left(2x-4x^2+8x^2\right)dx \\
&= \int_0^1\left(2x+4x^2\right)dx = \left[\,x^2+\frac{4}{3}x^3\,\right]_0^1 = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

となる． □

例題 35.8　$D = \{\,(x, y)\,|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1\,\}$ とする. 次の重積分を求めよ:

$$\iint_D (1 + x)y\,dx\,dy.$$

解答　積分する領域は

$$D = \{\,(x, y)\,|\, x \geqq 0,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}\,\}$$

と書けるので, 累次積分により

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 + x)y\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 (1 + x) \left[\frac{1}{2}\, y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + x)(1 - x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + x - x^2 - x^3)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{11}{24}
\end{aligned}$$

となる. □

演 習 問 題

35.9　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (1 + x + 2y)\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x, y)\,|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 2x\,\}.$ 〔≒ 2.10 A2(1)〕

(2) $\displaystyle\iint_D y \sin x\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x, y)\,|\, 0 \leqq x \leqq \tfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq y \leqq 1\,\}.$

(3) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x, y)\,|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1\,\}.$ 〔= 2.10 A2(3)〕

(4) $\displaystyle\iint_D \cos(x + y)\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x, y)\,|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq \pi\,\}.$ 〔≒ 2.10 A2(4)〕

(5) $\displaystyle\iint_D \cos\frac{x}{y}\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x, y)\,|\, \tfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \tfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq x \leqq y^2\,\}.$ 〔≒ 2.10 A3(2)〕

§ 36. 累次積分の順序交換

領域 D が 2 通りに

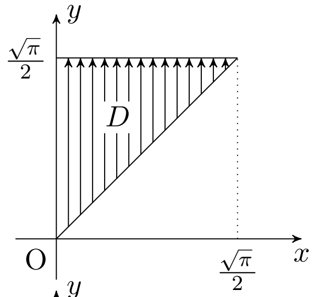
$$D = \{\,(x,y)\,|\,\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x),\ a \leqq x \leqq b\}$$
$$= \{\,(x,y)\,|\,\psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y),\ c \leqq y \leqq d\}$$

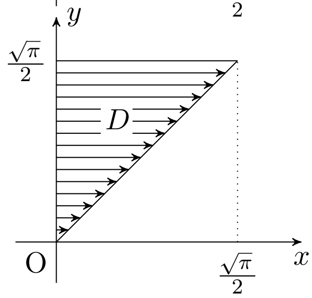
と書けるときは, (35.6) の左辺の重積分は (35.6) の右辺の形にも (35.3) の右辺の形にも書ける. この 2 つの表示の仕方の変形にも慣れておかう.

例題 36.1 領域 $D = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ x \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ 0 \leqq x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\right\}$ 上の重積分

$$\iint_D \sin y^2\,dxdy$$

を求めよ. (被積分函数は $\sin^2 y$ ではない.)





解答 まづは,

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_x^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin y^2\,dy \right) dx$$

と累次積分の形に書いてみると, ここから進めない. しかし

$$D = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq y,\ 0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\right\}$$

とも書けるから,

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_0^y \sin y^2\,dx \right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \Big[x \sin y^2 \Big]_{x=0}^{y} dy$$
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} y \sin y^2\,dy = \left[-\frac{1}{2}\cos y^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \quad \cdots \text{ Ans.}$$

を得る. □

注意 36.2 重積分の計算方法は 1 変数の定積分とは状況が異り, 積分の領域 D の形状に強く依存する. また, 累次積分の順序によつて積分の計算がうまく行つたり行かなかつたりする. できるだけ多くの問題を解いて経験を積んでいただきたい.

演習問題

36.3 重積分 $\displaystyle\int_1^e \left(\int_0^{\log x} \frac{1+y}{x}\,dy \right) dx$ について答へよ.

(1) 与へられた累次積分の順序で計算せよ.

(2) 積分の順序を入れ代へて計算し (1) の値と一致することを確かめよ.

36.4 累次積分の順序を交換することで, 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x e^{y^2}\,dy \right) dx.$ ([1], p.197)

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\int_{\frac{y}{2\pi}}^{\frac{1}{2}} x^4 \cos(yx^2)\,dx \right) dy.$

§ 37.　重積分における置換積分

37.1.　重積分に関する変数変換

この節では, 重積分における“置換積分法”を学ぶ. E を uv 平面上の閉領域とし, 写像

$$\Phi : (u,v) \mapsto (x,y) = \bigl(\varphi(u,v),\, \psi(u,v)\bigr)$$

により E が xy 平面上の閉領域 D に 1 対 1（全単射）に写されるとする. ここで, E, D は第 41.1 節で学ぶ様な, ある“理想的な”(連続かつ滑らかな Jordan 曲線により囲まれた）閉領域であるとする. また $\varphi(u,v)$ と $\psi(u,v)$ は E 上で連続とし, さらに, E の内部（境界を除いた部分）において偏導函数

$$x_u = \frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,v),\quad x_v = \frac{\partial}{\partial v}\varphi(u,v),\quad y_u = \frac{\partial}{\partial u}\psi(u,v),\quad y_v = \frac{\partial}{\partial v}\psi(u,v)$$

のすべてが存在し, それらは連続であるとする. 行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \tag{37.1}$$

は E 上の至るところで 0 でないとする.

定理 37.2　上の記号と仮定の下で, 閉領域 D 上で重積分可能な函数 $f(x,y)$ について

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f\bigl(\varphi(u,v),\, \psi(u,v)\bigr) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

が成り立つ.

上記の右辺の $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ は行列式 (37.1) の絶対値を表すが, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は Jacobi 行列式 (Jacobian) と呼ばれ, これが, 積分する領域の変数変換における局所的な拡大倍率を精確に表してゐるため, この公式が成り立つのである.

注意 37.3　37.2 の証明は第 41.3 節で行ふが, その前に, これに続く 2 つの小節で 2 つの重要な例を見ておく. そのために, 重積分の定義の修正が必要である. 重積分は xy 平面の軸に沿つた辺を持つ小長方形への分割によつて定義された. しかし, 多くの重積分を扱ふためには, その様な小長方形だけでなく, 任意の形の小図形（平行四辺形や扇台形など）で被積分函数の定義域を隙間なく敷き詰めた状態も含む極限でもつて定義しておく必要がある. とはいへ, それをきちんと述べても, 工学系の学生にとつては労力の割に得るものが少ない. この note は, 初歩的な積分計算が支障なくできることを目標としてゐるので, その様な踏み込んだ定義についても触れないで進むことにする.

37.2. 平行四辺形の積分領域上の重積分

重積分の置換積分について 2 つの重要な場合を述べたあと一般的な公式を述べる.

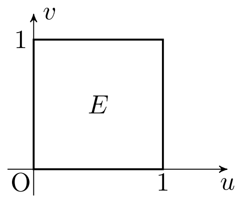
いま $a,\ b,\ c,\ d$ を $ad-bc\neq 0$ なる定数とする. uv 平面から xy 平面への写像

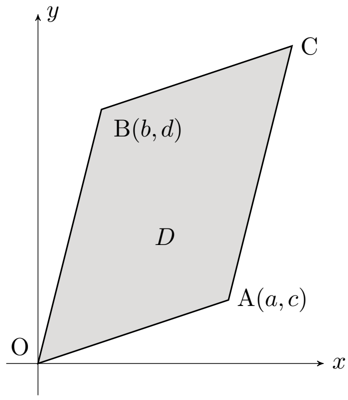
$$(u,v)\mapsto(au+bv,\ cu+dv)$$

により, 次の領域 E はその下の領域 D に写される :

$$E=\{\,(u,v)\,|\,0\leqq u\leqq 1,\ 0\leqq v\leqq 1\,\},$$

$$D=\{\,(x,y)\,|\,x=au+bv,\ y=cu+dv,\ (u,v)\in E\,\}.$$





D の面積は $|ad-bc|$ であり,

$$|ad-bc|\iint_E f(au+bv,cu+dv)dudv=\iint_D f(x,y)dxdy$$

である. 何故なら右辺の重積分に対応する立体は, 左辺の重積分に対応する立体が水平方向に $|ad-bc|$ 倍に拡大されたものであるから. ここではこの様な直観的な理解に留める（詳細は §41 で述べる）. 上の式は

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\underbrace{|ad-bc|}_{\text{拡大の倍率}}\iint_E f(au+bv,cu+dv)\,dudv$$

とも書けるが, これは E が他の形状であっても同様である. また, この関係式は

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_E f(au+bv,cu+dv)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv}$$

とも書けて, こちらの方が 1 変数との類似が見えるので覚え易い！ ここに

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$$

例題 37.4 次の重積分を求めよ :

$$\iint_D xy\,dxdy,\quad D=\{\,(x,y)\,|\,-1\leqq x-2y\leqq 3,\ -2\leqq 3x-y\leqq 1\,\}.$$

解答 $u=x-2y,\ v=3x-y$ とおくと, $x=-\frac{1}{5}(u-2v),\ y=-\frac{1}{5}(3u-v)$ であるから, 上記の拡大の倍率 $|ad-bc|$ は $\left|(-\frac{1}{5})\times\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\times(-\frac{3}{5})\right|=\frac{1}{5}$ である. ゆゑに

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{1}{5}\iint_E\Big(-\frac{1}{5}(u-2v)\Big)\Big(-\frac{1}{5}(3u-v)\Big)dudv\\ &=\frac{1}{125}\int_{-2}^{1}\left(\int_{-1}^{3}(3u^2-7uv+2v^2)\,du\right)dv=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

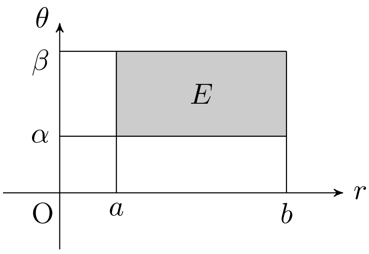
となる. 但し, $E=\{\,(u,v)\,|\,-1\leqq u\leqq 3,\ -2\leqq v\leqq 1\,\}$ である. □

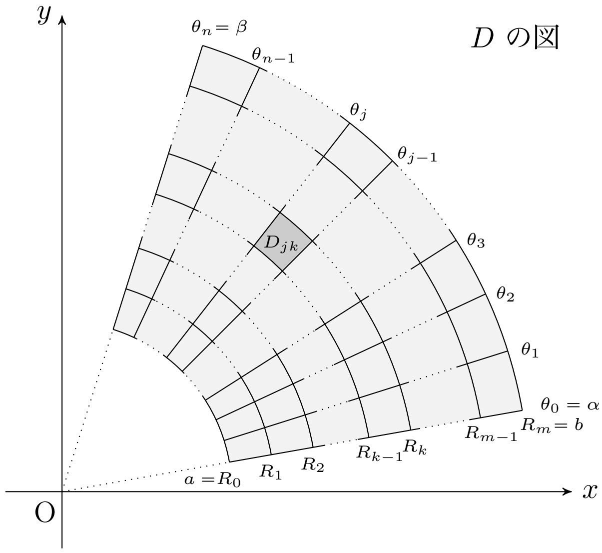
37.3. 扇台形の領域上の重積分

次に, 直交座標を極座標に変換した場合の重積分の公式を説明する.
$0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi$, $0 < a < b$ を定数とし,

$$E = \{(r, \theta) \,|\, \alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ \ a \leqq r \leqq b\}$$

とする.





また

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, (r, \theta) \in E\}$$

とおく. この様な形を <u>扇台形</u>(おおぎだいけい) と呼ぶことにする. 重積分

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy$$

を計算したい. そこで, 自然数 n に対し, α から β の間を n 等分した分割を

$$\Delta_\theta:\ \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta, \quad \theta_j = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} j \ \ (j = 0, \cdots, n)$$

とし, さらに, 別の自然数 m を取り a から b の間を m 等分した分割を

$$\Delta_r:\ a = R_0 < R_1 < \cdots < R_{m-1} < R_m = b,$$

$$R_k = a + \frac{b - a}{m} k \ \ (k = 0, \ \cdots, \ m)$$

とし,

$$r_k = \frac{R_{k-1} + R_k}{2}, \quad \Delta r = \frac{b - a}{m}, \quad \Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

とおく. このとき, 小領域

$$D_{jk} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, \theta_{j-1} \leqq \theta \leqq \theta_j, \ \ R_{k-1} \leqq r \leqq R_k\}$$

の面積 $\mu(D_{jk})$ は (扇型の面積の公式を使つて)

$$\begin{aligned}\mu(D_{jk}) &= \frac{1}{2}{R_k}^2 \cdot \Delta\theta - \frac{1}{2}{R_{k-1}}^2 \cdot \Delta\theta = \frac{1}{2}(R_k + R_{k-1})(R_k - R_{k-1}) \cdot \Delta\theta \\ &= r_k (R_k - R_{k-1}) \cdot \Delta\theta = r_k \cdot \Delta r \cdot \Delta\theta\end{aligned}$$

であるから, 次式が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(r_k\cos\theta_j, r_k\sin\theta_j)\,\mu(D_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \underline{f(r_k\cos\theta_j, r_k\sin\theta_j)\, r_k}\, \Delta r \right) \Delta\theta.$$

ここで, 点 $(r_k\cos\theta_j, r_k\sin\theta_j)$ が小矩形 D_{jk} 内の点であることから, 左辺で, $m\to\infty$ $n\to\infty$ としたときの極限は重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

を与へる（37.3 を参照されたい）. 一方, 各 r_k が小区間 $[R_{k-1}, R_k]$ 内にあることから, 下線部を r の関数 $f(r\cos\theta_j, r\sin\theta_j)r$ の r に r_k を代入したものと考へて, 1 変数のときの区分求積法を使ふと, 右辺において $m\to\infty$ としたものは

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_a^b f(r\cos\theta_j, r\sin\theta_j)r\,dr\Big)\Delta\theta$$

に収束する. さらに $n\to\infty$ とすると, 再び区分求積法から

$$\int_\alpha^\beta\Big(\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\Big)d\theta = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

に収束する.

より一般に例へば, 縦線領域 $E=\{(r,\theta)\,|\,\alpha\leqq\theta\leqq\beta,\ \ \varphi_1(\theta)\leqq r\leqq\varphi_2(\theta)\}$ と, 対応する領域 $D=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,(r,\theta)\in E\}$ についても同様な考察ができる. 結局, 極座標表示によつて移り合ふ領域 E, D について, 次の結果が得られたことになる.

定理 37.5 上記の記号の下に

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

が成り立つ. （この公式は $dxdy = rdrd\theta$ と覚えやう. ）

注意 37.6 この場合も

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

であつて, やはり次の公式が成り立つ:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta.$$

実は, もつと一般な状況で, この公式は成り立つ. 即ち, 変数 (x,y) と (u,v) がある程度の望ましい函数関係にあれば, (x,y) に関する重積分を (u,v) に関する重積分に書き替へることができて, その様な状況では, いつでも上の式が成立する. この公式の証明は Green の定理 41.8 が必要なので, §41 で証明を与へる.

1 変数のときの公式と 2 変数のときの公式をよく見比べて欲しい. 数学は, 一般的な状況へ広がるにつれて, 必ずしも複雑になるわけではなく, 正しく理論が構成されてゐれば, 一般的な状況で理解した方が簡単に感じられるものなのである. 力ある方には, どうか, 様々な場面を通し, 数学のその様な面を多く感じていただけることを切望する. とはいつても, この講義録では, 上で述べた 2 つの場合（平行四辺形を長方形への, あるいは, 極座標による変換の場合）以外の計算に関しては述べない.

例題 37.7　領域 $D = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq \frac{1}{4},\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\,\}$ 上の重積分を求めよ:

$$\iint_D \sin \pi(x^2+y^2)\,dxdy.$$

解答　極座標で D に対応するのは $E = \{\,(r,\theta)\,|\,0 \leqq r \leqq \frac{1}{2},\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\,\}$ であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (\sin \pi r^2)\,r dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2\pi} \cos \pi r^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2\pi} \left(\cos \frac{\pi}{4} - 1 \right) \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right) d\theta \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{2-\sqrt{2}}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

となる.　□

演 習 問 題

37.8　次の重積分を求めよ. その際, 領域 D も図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2-y^2)dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1\,\}.$ 〔$=$2.11 A1(1)〕

(2) $\displaystyle\iint_D (x+2y)dx\,dy,\ D = \{\,(x,y)\,|\,0 \leqq 3x-y \leqq 3,\ -4 \leqq x-3y \leqq 0\,\}.$ 〔$\fallingdotseq$2.11 A1(2)〕

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,|y+2x| \leqq 2,\ |2y-x| \leqq 1\,\}.$ 〔$=$2.11 A1(4)〕

37.9　次の重積分を求めよ. その際, 領域 D も図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\,\}.$ 〔$=$2.11 A2(1)〕

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2\,\}.$ 〔$=$2.11 A2(2)〕

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\,\}.$ 〔$=$2.11 A2(3)〕

(4) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\,\}.$ 〔$\fallingdotseq$2.11 A2(4)〕

(5) $\displaystyle\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq \frac{\pi^2}{4}\,\}.$ 〔$\fallingdotseq$2.11 A2(5)〕

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\,\}.$ 〔$=$2.11 A2(6)〕

(7) $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy,\quad D = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq x,\ y \geqq 0\,\}.$ 〔$\fallingdotseq$2.11 A2(7)〕

(8) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ D = \{\,(x,y)\,|\,x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x \leqq x^2+y^2 \leqq 1\,\}.$ 〔$=$2.11 A2(8)〕

第 7 章　応用

これまで学んできたことの応用を本章にまとめた．主に重積分の応用として, 体積の計算, Γ 函数や B 函数の構成と性質, 線積分, Green の定理などを学ぶ.

§ 38.　立体の体積の計算

38.1.　体積の定義, 一般の立体の体積の計算

xyz 空間内の“ 立体 ”の体積 V は, 理論的には, その“ 立体 ”を定義域とし常に値 1 をとる定数函数の3 重積分として定義する.

　ここで, xyz 空間内の閉領域 V で連続な函数 $f(x,y,z)$ についての 3 重積分

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \tag{38.1}$$

の定義は, 2 重積分の場合と同様である．即ち, まづ V を含んだ（座標軸に沿つた）直方体の形の領域 D を選んで, D を細かな（座標軸の沿ふ）直方体への“ 分割 ”Δ を用意し, 各分割片 Δ_{ijk} ごとに点 P_{ijk} を採る．このとき vD_{ijk} における $f(x,y,z)$ の最小値 m_i, 函数値 $f(\mathrm{P}_{ijk})$, 最大値 M_{ijk} についての和について

$$\sum_{i,j,k} m_{ijk}\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \leqq \sum_{i,j,k} f(\mathrm{P}_{ijk})\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \leqq \sum_{i,j,k} M_{ijk}\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

が成り立ち, 分割の“ 大きさ ” $|\Delta|$ を 0 に限りなく近づけたとき, この 3 つが一定の値に限りなく近づくならば, その極限値を (38.1) の様に書くのである.

注意 38.2　この note に登場する, すべての立体とその上の函数については, この様な積分が定義される.

ここで, 体積を再定義する.

定義 38.3　まづ, 3 変数の場合にも有界集合を 2 変数以下の場合と同様に定義する．xyz 空間の中の有界閉領域（立体） V について,

$$\iiint_V 1dxdydz \quad \left(\text{通常は } \iiint_V dxdydz \text{ の様に 1 を省く.}\right)$$

が存在するとき, これを V の体積と呼び $\mathrm{vol}(V)$ と記す :

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V dxdydz.$$

重積分は累次積分で書ける, といふ原理を適用すると次の様な定理が得られる. これにより, 体積計算なとの計算が実行可能となる.

定理 38.4 xy 平面上の有界閉領域 D 上で定義された連続な函数 $f(x,y)$ が, 常に $f(x,y) \geqq 0$ を満たすとき,

$$V = \{\,(x,y,z)\,|\,0 \leqq z \leqq f(x,y),\ (x,y) \in D\,\}$$

についての $\mathrm{vol}(V)$ の累次積分表示は様々な仕方で 2 変数の重積分と 1 変数の重積分との累次積分に表される：

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(V) = \iiint\limits_V 1\,dxdydz &= \iint_D \Big(\int_0^{f(x,y)} 1\,dz\Big)dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_a^b \Big(\iint\limits_{V_x} 1\,dydz\Big)dx = \int_a^b S(x)dx.\end{aligned}$$

ここで V_x は点 $(x,0,0)$ を通り yz 平面に平行な平面による V の切り口を表し, $S(x)$ は V_x の面積を表す.
これ以外の形にも書き替へられるが, 煩雑なので書かない.

これで, 高校「数学 III」で学んだ体積を積分で求める公式が, 我々の重積分の定義に沿つて再確認されたことになる.

注意 38.5 xy 平面上の閉領域 D で定義された連続函数 $z = f(x,y)$ に対する重積分

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

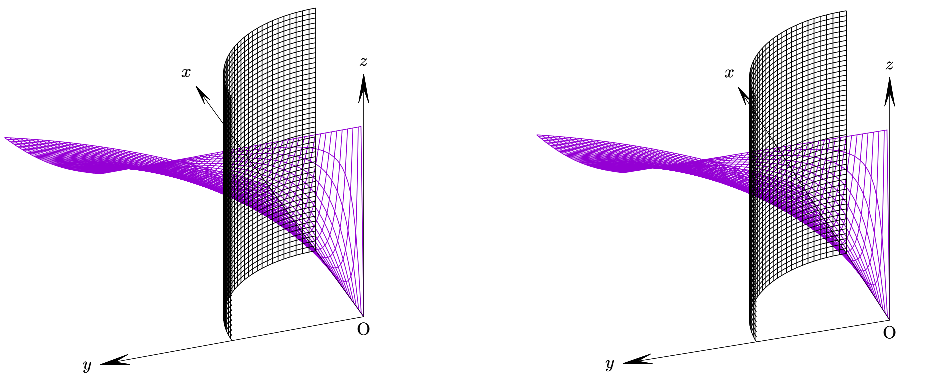
は, $z = f(x,y)$ が D 上に定める xyz 空間内の立体の符号付きの体積と考へられる.

注意 38.6 歴史的には, 体積から積分の概念が生まれたのに, 結局, 積分を使つて体積を定義することになつてしまつた. 純粋数学ではこの様に, 常識的に上位にある概念と常識的に下位にある概念の逆転がよく起こる. 他の例として, 厳密な円周率の定義は線積分によるのであり, 三角函数の厳密な定義の前に逆三角函数を定義することは, 純粋数学的には, 自然である. さらに, 重大な一例を挙げると, 筆者には, 「確率」の概念は, あらゆる科学的概念の根本概念へと変貌を遂げつつある様に感じられる. 常識的には, この様な概念の逆転は直ちには受け入れ難いであらうことも, 数学者は心得てゐる. とはいへ, 理論の堅牢さ, 健全さを保つには, この様な概念の逆転現象を受け入れていかなくてはならない.

厳密な理論構成に興味のない読者には, ともかく 35.1 の様に理解して以降を読み進めていただければ十分である.

例題 38.7 次に定める立体 V の体積を求めよ.

$$S = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, y \geqq x\tan z,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z \leqq \frac{\pi}{2} \right\}.$$



(図は “立体視”)

解答 $D_\varepsilon = \{ (x,y) \,|\, \varepsilon \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \}$ とおけば, V の体積は重積分の極限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D_\varepsilon} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$$

に他ならない. 但し, $x=0$ なる点では被積分函数の値は 1 とする. これを極座標に変換すると

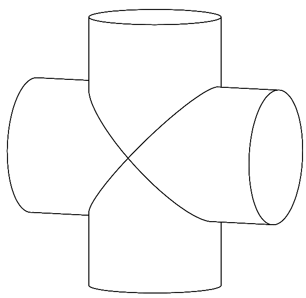
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_\varepsilon^1 \tan^{-1} \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\, rdr \right) d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_\varepsilon^1 \tan^{-1}(\tan\theta)\, rdr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \theta\, rdr \right) d\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta \right) \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 rdr \right) = \left[\frac{1}{2}\theta^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_\varepsilon^1 = \frac{\pi^2}{16}$$

となる. (ここは, 重積分における <u>広義積分</u> の考へ方の説明を含んでゐる) □

演 習 問 題

38.8 a を正の定数とする. xyz 空間において, 球 $\{ (x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2 \}$ と円柱 $\{ (x,y,z) \,|\, (x-a)^2+y^2 \leqq a^2 \}$ の共有部分の体積 V を求めよ. 〔≒2.11 B2〕



38.9 xyz 空間内の 2 つの円柱

$$S = \{ (x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leqq 1 \},$$
$$T = \{ (x,y,z) \,|\, y^2+z^2 \leqq 1 \}$$

の共通部分の体積 V を求めよ. 〔= 2.10 B2〕

38.10 a, b, c を正の定数とする. 楕円体

$$E = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$$

の体積 V を求めよ. 〔= 2.10 B1〕

38.2. 回転体の体積

この節では回転体の体積について述べる．

命題 38.11 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続であるとき, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる図形を x 軸の廻りに一回転させてできる立体の体積 V は次で与へられる：

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx.$$

証明 (35.1) を使ふ． 今の場合, $S(x)$ は半径 $|f(x)|$ の円の面積に他ならないから $S(x)=\pi f(x)^2$ であるゆえに, 所望の式が成り立つ． □

例題 38.12 $a>0$ を定数とする．Cycloid 〔= 2.12 A5(1)〕

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と x で囲まれた図形を x 軸の廻りに回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答 38.11 を使ひ, 積分変数 x から θ に置換すると,

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos\theta)^2\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos\theta)^3\,d\theta\\
&=\pi\int_0^{2\pi}a^3\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^3d\theta\underset{\substack{\theta=2t\\ \text{とおく}}}{=}2\pi\int_0^{\pi}a^3\left(2\sin^2t\right)^3dt=2^4a^3\pi\int_0^{\pi}\sin^6t\,dt\\
&=2\cdot 2^4a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6t\,dt=2\cdot 2^4a^3\pi\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=5\pi^2a^3
\end{aligned}$$

となる．最後の定積分を求めるところで (31.15) を使つた． □

演 習 問 題

38.13 Asteroid で囲まれた図形 $\{(x,y)\,\big|\,|x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}\leqq 1\}$ を x 軸の廻りに回転させてできる立体の体積を求めよ．

38.14 次の曲線（Catenary, 懸垂線）を x 軸の廻りに回転させてできる図形と 2 平面 $x=-a$, $x=a$ で囲まれる部分の体積を求めよ．但し, a は正の定数である．

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\quad(-a\leqq x\leqq a).$$

38.15 （Baumkuchen（バウムクーヘン）式積分 [44]） $a>0$ とし, $f(x)$ は区間 $[0,a]$ で定義された連続函数で, この区間で $f(x)\leqq f(a)$ であるとする．曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq a)$ と y 軸と直線 $y=f(a)$ で囲まれた部分を y 軸の廻りに回転させてできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_0^a x\big(f(a)-f(x)\big)\,dx$$

で与へられることを説明せよ．また, この公式を使つて, 次の様な円錐の体積を求めよ：頂点が原点 O にあり, 底面が y 軸上の座標が $h(>0)$ の点を通つて y 軸と垂直な平面上にある半径 a である様な円錐．

[44] 英語では the method of cylindrical shells.

§ 39. 曲面の表面積

以下のために 25.7 において述べた C^r 級の 2 変数函数の定義を思ひ出して欲しい.

39.1. 一般の曲面の表面積

開領域 D で定義された C^1 級の函数 $z = f(x,y)$ について, xyz 空間内に, これの graph として描かれる曲面の面積（表面積, 曲面積ともいふ）を直観的に捉へて, その計算方法を述べる. ここで扱ふ曲面の定義を厳密に述べると非常に煩雑であるから, ここは直観的な理解で済ませることにする. また, 曲面積の厳密な定義は, 局所的に接平面で近似することで得られるのであるが, ここでは詳細を述べないことにする. ちなみに, 曲面上にたくさんの点を用意して, それらを頂点とするたくさんの小三角形（互ひに辺で接する）を張り巡らして, 近似する方法は破綻することが知られてゐる（Schwartz の提灯（ちょうちん））.

定理 39.1 函数 $f(x,y)$ が閉領域 D で連続であり, D の内部で C^1 級であるとき, 領域 D 上の曲面

$$K = \{\,(x,y,f(x,y)) \,|\, (x,y) \in D\,\}$$

は面積を持ち, その値 S は次式で与へられる：

$$S = \iint_D \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\; dx\,dy.$$

証明 領域 D の分割 Δ の任意の細分 Δ_{ij} について, 点 $\mathrm{P}(x,y,f(x,y)) \in \Delta_{ij}$ における接平面の鉛直との傾きを θ とするとき, Δ_{ij} 上にある曲面の部分の面積 $S(\Delta_{ij})$ と Δ_{ij} の比は, $|\Delta| \to 0$ のとき $1/\cos\theta$（倍率）に限りなく近づく. θ は, 点 P における接平面の法線 vector

$$\overrightarrow{n} = (f_x(x,y),\, f_y(x,y),\, 1)$$

の鉛直線からの傾きであるから, 鉛直な vector $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$ との内積を考へれば,

$$1 = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{e_3} = \left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{e_3}\right| \cos\theta.$$

$$\therefore\ \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}$$

となる. このことから与式が成り立つ. □

例題 39.2 $D = \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\,\}$ 上で $z = xy$ が与へる曲面の表面積 S を求めよ.

解答 $z_x = y,\ z_y = x$ であるから,

$$S = \iint_D \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\, dxdy$$

である. 極座標に変換すると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \end{aligned}$$

となる. □

39.2. 回転体の表面積

命題 39.3 函数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で, 区間 (a,b) で C^1 級であるとき, 区間 $[a,b]$ で, 曲線 $y=f(x)$ を x 軸の廻りに一回転させてできる曲面の面積 S は次式で与へられる:

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

証明 与へられた曲面の方程式は

$$y^2+z^2=f(x)^2$$

である. このとき, $z \geqq 0$ において,

$$2y+2zz_y=0,\quad 2zz_x=2f(x)f'(x)$$

であるから

$$\begin{aligned}
{z_x}^2+{z_y}^2+1 &= \frac{f(x)^2f'(x)^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+1\\
&= \frac{f(x)^2f'(x)^2+y^2+z^2}{z^2}\\
&= \frac{f(x)^2f'(x)^2+f(x)^2}{z^2}\\
&= \frac{f(x)^2(1+f'(x)^2)}{y^2-f(x)^2}
\end{aligned}$$

から, 領域

$$D=\{\,(x,y)\,|\,a\leqq x\leqq b,\ 0\leqq y\leqq |f(x)|\,\}$$

上の上の曲面の $z\geqq 0$ の部分の面積の 4 倍である. 従つて, 求める面積は

$$\begin{aligned}
S &= 4\iint_D \sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\,dxdy\\
&= 4\iint_D \sqrt{\frac{f(x)^2(1+f'(x)^2)}{y^2-f(x)^2}}\,dxdy\\
&= 4\int_a^b\left(\int_0^{|f(x)|}\sqrt{\frac{f(x)^2(1+f'(x)^2)}{y^2-f(x)^2}}\,dy\right)dx\\
&= 4\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\left(\int_0^{|f(x)|}\frac{1}{\sqrt{y^2-f(x)^2}}\,dy\right)dx\\
&= 4\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\sin^{-1}\frac{y}{f(x)}\right]_0^{|f(x)|}dx\\
&= 4\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\,dx\\
&= 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

となる. □

例題 39.4 区間 $[0,\pi]$ において, 函数 $f(x)=\sin x$ の graph を x 軸の廻りに 1 回転させてできる曲面の表面積 S を求めよ.

解答 39.3 を使へば,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi |\sin x| \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx \\ &= \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x} \sin x \, dx \\ &= \left[-\tfrac{1}{2} \left(\sqrt{\cos^2 x + 1} \cos x + \log \left| \sqrt{\cos^2 x+1} + \cos x \right| \right) \right]_0^\pi \\ &\qquad\qquad (\because\ u=\cos x \text{ と置換して, 28.8 の 14 を利用}) \\ &= -\left(\sqrt{2}(-1) + \log\left|\sqrt{2}-1\right| \right) \\ &= \sqrt{2} - \log(\sqrt{2}-1)\ \ (= \sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)) \end{aligned}$$

と計算される. □

定理 39.5 $\mathbb{R}^2$ 内の有界な閉領域 D で連続で, D の内部では C^1 級である様な函数の組

$$(u,v) \longmapsto (x,y,z) = (\varphi(u,v),\, \psi(u,v),\, \chi(u,v))$$

の xyz 空間における像がなす曲面の像の表面積 S は次で与へられる [45]:

$$S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, dudv.$$

これと平面曲線の長さの公式 (33.4) との類似点を観察されたい.
この様な公式から, 例へば行列式の重要性/自然さを感じ取つていただきたい.

a, b, c を正定数とする. 楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

は, 媒介変数 θ, φ を用いて,

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\theta, \\ y = b\cos\varphi\sin\theta, \\ z = c\sin\varphi; \end{cases} \qquad D = \left\{ (\theta,\varphi) \;\middle|\; 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ -\tfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \tfrac{\pi}{2} \right\}$$

と表される. $a=b=c$ の場合, つまり球の表面積は, 確かに既知の $\frac{4}{3}\pi a^3$ と一致する.
一般の a, b, c の場合は, S を初等函数で書くことはできない.

[45] 残念ながら, この公式を使つて表面積が具体的な値として得られる様な一般的な曲面の例を見たことがない.

演 習 問 題

39.6 a を正定数とする．区間 $[0, a]$ において, 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ の graph を x 軸の廻りに 1 回転させてできる曲面（放物面の一例）の表面積 S を求めよ．

39.7 区間 $[0, 1]$ において, 函数 $f(x) = e^x$ の graph を x 軸の廻りに 1 回転させてできる曲面の表面積 S を求めよ．

39.8 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱 $(x - a)^2 + y^2 \leqq a^2$ の共有部分の面積 S を求めよ．

39.9 $a > 0$ を定数とする．Cycloid

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

を x 軸の周りに回転させてできる曲面の表面積を求めよ．

39.10 Catenary（懸垂線）

$$y = \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) \quad (-a \leqq x \leqq a)$$

を x 軸の廻りに回転させてできる曲面の表面積を求めよ．

39.11 次に定める部分 S の表面積を求めよ: ([4], p.303)

$$S = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, y = x\tan z,\ x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z \leqq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

（図は 38.7 を参照せよ．）

§ 40. Γ 函数と B 函数

40.1. Γ 函数

Γ 函数は, 微積分の知識を集大成し, 深い数学へと導くための恰好の素材である. 始めに次の計算に注目する. $n \in \mathbb{Z}, \geqq 0$ について, 8.25(1) より $\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \underset{\text{ビ}}{t^n}\, \underset{\text{セ}}{e^{-t}}\, dt &= \Big[t^n(-1)e^{-t} \Big]_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-t} dt = 0 + n\int_0^\infty \underset{\text{ビ}}{t^{n-1}}\, \underset{\text{セ}}{e^{-t}}\, dt \\
&= n(n-1)\int_0^\infty \underset{\text{ビ}}{t^{n-2}}\, \underset{\text{セ}}{e^{-t}}\, dt = \cdots = n!\int_0^\infty e^{-t} dt \\
&= n!.
\end{aligned}$$

ここまでは, n は負でない整数であるが, 以下で示す様に, この広義積分は n が, より一般に, 正の実数であつても定義できる（収束する）. そのことに鑑みて次の定義をする. この idea はたいへん優れてゐて, この函数は非常に役に立つ.

補題と定義 40.1 $x > 0$ に対して, 広義積分

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

は収束する. これを $\underline{\overset{\text{ガンマ}}{\Gamma}\text{ 函数}}$ $\Gamma(x)$ と称する.

証明 以下 $x > 0$ は固定された値とする. 8.25(2) により $\lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ である. ゆゑに, 定数 $a > 0$ が存在して t の区間 $[a, \infty)$ において常に $t^{x+1}e^{-t} < 1$ が成り立つ. そこで, 上の積分を

$$\Gamma(x) = \int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt + \int_a^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{40.2}$$

と 2 つの定積分に分けて調べる. $\varphi(t) = t^{x-1}e^{-t}$ とおく. 区間 $(0, \infty)$ で $\varphi(t) > 0$ なので, 函数 $\varepsilon \mapsto \displaystyle\int_\varepsilon^a \varphi(t)dt$ は単調増加する. しかも $\varphi(t) < t^{x-1}$ ゆゑ,

$$\int_\varepsilon^a \varphi(t)dt < \int_\varepsilon^a t^{x-1}dt = \left[\frac{1}{x}t^x\right]_\varepsilon^a = \frac{a^x}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} < \frac{a^x}{x}$$

となつて上に有界である. よつてこの (40.2) の第 1 の積分は収束する. 次に, 函数 $[a, \infty) \ni M \mapsto \displaystyle\int_a^M \varphi(t)dt$ も, 上と同じ理由から単調増加である. また $a \leqq t$ なので, $\varphi(t) = \dfrac{t^{x+1}}{e^t} \cdot \dfrac{1}{t^2} < \dfrac{1}{t^2}$ ゆゑ,

$$\int_a^M \varphi(t)dt < \int_a^M \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_a^M = \frac{1}{a} - \frac{1}{M} < \frac{1}{a}$$

となり, 上に有界である. よつて, 第 2 の積分も収束する. 以上から $\Gamma(x)$ を定義する広義積分は収束する. □

注意 40.3 実際の $\Gamma(x)$ の定義域はもつと広いのであるが, 微積分の範囲では定義域が $x > 0$ の場合しか扱はない.

命題 40.4　$\Gamma(1) = 1$ であり, $x > 0$ について次式が成り立つ:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

特に, 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ である.

証明　$\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty = 1$ である. 次に 40.1 の直前で行つた計算と同様な計算を行ふ. 但し 8.25(1) の代りに 8.25(2) を使用する. さうすると,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty \underset{ビ}{t^x}\,\underset{セ}{e^{-t}}\,dt = \Big[t^x\,(-1)e^{-t}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty x\,t^{x-1}(-1)e^{-t}dt \\ &= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\,\Gamma(x)\end{aligned}$$

となつて証明された. □

次の様に $\Gamma(\frac{1}{2})$ を求めることができる.

命題 40.5　次の式が成り立つ:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

証明　前半:

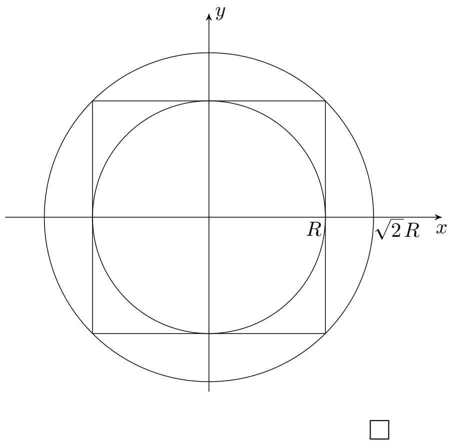
$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \underset{(t=x^2)}{=} 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx \ (=I\ とおく).$$

後半の証明は技巧的である:（以下, 極座標への変換 $(x,y) \to (r,\theta)$ を行ふ）

$$\begin{aligned}I^2 &= \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} e^{-x^2}dx\cdot\int_{-M}^{M} e^{-y^2}dy = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta \quad \text{（ここは下で説明）} \qquad (40.6)\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^R d\theta = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{2}(e^{-R^2}-1)\Big)d\theta = \pi.\end{aligned}$$

ゆゑに $I = \sqrt{\pi}$.（この計算は重積分における一種の広義積分である）

(40.6) の第 2 行の等号の証明. $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2} > 0$ であることと, 積分の不等式 (31.1), および図から次の大小関係が成り立つことがわかる:



$$\begin{aligned}&\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta \\ &\quad \leqq \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\ &\quad\quad \leqq \int_0^{\sqrt{2}R}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta.\end{aligned}$$

これより (40.6) の第 2 行の等号は明らかである. □

例題 40.7 次の広義積分の値を求めよ：

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx.$$

解答 $u = x^3$ とおくと $x = u^{\frac{1}{3}}$ であり，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^\infty u^{\frac{1}{6}} e^{-u} \frac{dx}{du}\, du \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{1}{6}} e^{-u} \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}\, du \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\, du = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\end{aligned}$$

である． □

注意 40.8 大きな n について，$n!$ のおよその大きさを知るのに，次の公式がある．

定理 40.9 （Stirling の公式）次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} = 1.$$

精密な誤差評価のためには，例へば Herbert Robbins の不等式（1955 年）の Γ 函数版として，任意の $x > 0$ に対して成り立つ次の式が便利である：

$$\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} \exp\left(-x + \frac{1}{12x+1}\right) < \Gamma(x) < \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} \exp\left(-x + \frac{1}{12x}\right).$$

上の式の精度を試してみる： $100! = 933262154\cdots$ （158 桁） であるが，

$$\text{左辺} = 9.332615\cdots \times 10^{157}, \quad \text{右辺} = 9.3326215703\cdots \times 10^{157}.$$

証明はしないが，次の様なことも知られてゐる．

命題 40.10 次の式が成り立つ：

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\tfrac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\tfrac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{\frac{1}{2}-nx}\Gamma(nx).$$

これらの式から Γ 函数が非常に重要な函数であることが感じられる．

演 習 問 題

40.11 次の広義積分を Γ 函数を使つて求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^3} x^5\, dx.$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} x^{\frac{1}{4}}\, dx.$

40.2. B 函数

階乗の一般化が $\Gamma(x)$ であるが, 2 項係数の一般化が次に定義する $\overset{\text{ベータ}}{B}$ 函数である.

定義 40.12 2 つの実数 $p>0,\ q>0$ を変数とする函数 $B(p,q)$ を次式で定義する:

(40.13) $$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^\infty (y+1)^{-p-q}y^{q-1}dy \quad \left(t=\frac{1}{y+1}\right).$$

これを <u>$\overset{\text{ベータ}}{B}$ 函数</u>と呼ぶ:

(40.13) の最初の積分で t を $1-t$ に置き換へてみる. このとき t が 0 から 1 まで変化すると, $1-t$ は 1 から 0 へと変化し, dt が $-dt$ に置き換はるから, 次式が成り立つ:

(40.14) $$B(q,p)=B(p,q).$$

命題 40.15 実数 $p>0,\ q>0$ について次の式が成り立つ:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

証明 まづ, 定義から

(40.16) $$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\left(\int_0^\infty u^{p-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^\infty v^{q-1}e^{-v}dv\right)\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty u^{p-1}e^{-u}v^{q-1}e^{-v}dudv=\int_0^\infty\int_0^\infty u^{p-1}v^{q-1}e^{-u-v}dudv.\end{aligned}$$

ここで次の置換を行ふ (図を参照されたい):

$$u+v=z,\quad \frac{u}{v}=\frac{1-t}{t}.$$

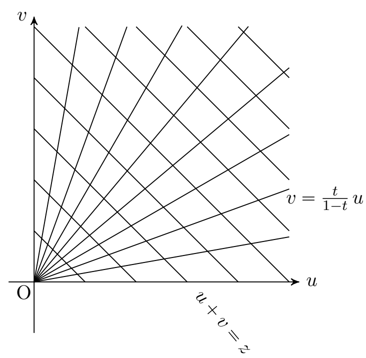
これを u と v について解けば

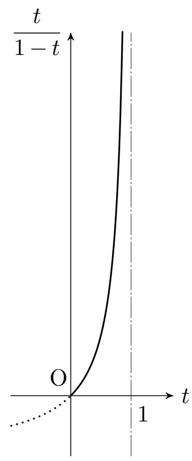
$$u=z(1-t),\quad v=zt.$$

ここで t が 0 から 1 へと変化するとき, "傾き" $\frac{t}{1-t}$ は 0 から ∞ まで変化し, (u,v) の動く範囲 (第 1 象限) は

$$\{(t,z)\,|\,z>0,\ 0<t<1\}$$

に対応する.





また, この変数変換に対する Jacobi 行列式は

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-z & 1-t\\ z & t\end{vmatrix}=-z$$

で, これの絶対値は z であるから (広義積分であることに注意) (40.16) に 37.2 を使へば

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^1 (z(1-t))^{p-1}(tz)^{q-1}e^{-z}z\,dt\right)dz=\int_0^\infty\left(\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\,z^{p+q-1}e^{-z}dt\right)dz$$

$$=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt\int_0^\infty z^{p+q-1}e^{-z}\,dz=B(q,p)\,\Gamma(p+q)\underset{(40.14)}{=}B(p,q)\,\Gamma(p+q)$$

となり所望の式が示された. □

注意 40.17 40.15 から, 本質的には B 函数が 2 項係数の一般化であることがわかる:

$$\binom{p+q}{q} = \frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)} = \frac{p+q}{pq}\,\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} = \frac{p+q}{pq}\,\frac{1}{B(p,q)} \quad (p,\ q \in \mathbb{N}).$$

命題 40.18 次の式が成り立つ:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,d\theta. \tag{40.19}$$

証明 (40.13) の第 1 の表示において $t=\sin^2\theta$ とおくと $1-t=\cos^2\theta$ で, t の変化 $0\to1$ は θ の変化 $0\to\frac{\pi}{2}$ に対応するから, あるから,

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-2}\theta\,\cos^{2q-2}\theta\,\frac{dt}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-2}\theta\,\cos^{2q-2}\theta\,(2\sin\theta\,\cos\theta)\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,d\theta \end{aligned}$$

となり, 所望の式が得られた. □

ここで, 等式 (40.19) と (31.15) を比較されたい.

例 40.20 (40.19) を使ふと, 例へば

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,\cos^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\Big(\frac{5}{2},\frac{4}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\big(\frac{5}{2}\big)\Gamma(2)}{\Gamma\big(\frac{9}{2}\big)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)} = \frac{2}{35}$$

の様に計算できる. 上記の計算においては, 40.5 からわかる $\Gamma(\frac{1}{2})\neq0$ を利用した.

例題 40.21 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t^3)^{\frac{1}{2}}\,dt$ の値を求めよ.

解答 $u=t^3$ とおくと

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^1 u^{\frac{1}{6}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,\frac{dt}{du}\,du = \int_0^1 u^{\frac{1}{6}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\,du \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}B\Big(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\,\frac{1}{2}\,\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{1!} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{\pi}^2 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である. □

演 習 問 題

40.22 次の積分を B 函数, Γ 函数を使つて求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\cos^5\theta\,d\theta.$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos^7\theta\,d\theta.$

40.23 次の積分を B 函数, Γ 函数を使つて求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 t^5(1-t^4)^{\frac{1}{2}}\,dt.$ (2) $\displaystyle\int_0^1 t^5\,(1-t^3)^{\frac{1}{3}}\,dt.$

40.24 40.15 の関係式で $p=q=\frac{1}{2}$ とすることにより, $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)=\sqrt{\pi}$ の別証を与へよ.

§ 41.　線積分と Green の定理

41.1.　平面曲線

変数変換の公式 37.2 の証明に必要な Green の定理と呼ばれる定理を解説する．これは, Stokes の定理と呼ばれる定理の特別なものであつて, 重要である．Stokes の定理は微分積分学の基本定理の高次元化と見做されるものである．これは, 例へば物理学で学ぶ理論をきちんと理解するためには必須のものである．さて, これらの定理を説明するために, 閉曲線の囲む領域（逆の言ひ方だと, 領域の境界をなす曲線）について, きちんと述べておかなくてはならないため, それをこの小節で行ふ．ここでの定義は, 初学者向けに, かなり狭い概念になつてゐることを付言しておく．

定義 41.1　区間 $I = [\,a, b\,]$ から $\mathbb{R}^2$ への連続な写像のことを 曲線 と呼ぶ：写像

$$C : I \ni t \longmapsto (\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2 \tag{41.2}$$

において, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ の双方が連続であれば C は 曲線 と呼ばれる．
曲線についての以下の様な概念を定義する．

(1) 曲線に次の様に 向き（方向）を付加したものを, 有向曲線 と呼ぶ．
C の 始点 を $(\varphi(a), \psi(a))$ で 終点 を $(\varphi(b), \psi(b))$ とする場合は

$$C : x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad (\,t : a \to b\,),$$

逆に, 始点を $(\varphi(b), \psi(b))$ で終点を $(\varphi(a), \psi(a))$ とする場合は

$$C : x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad (\,t : b \to a\,)$$

などと記す．向きは a, b の大小とは無関係である．

(2) 区間 $(\,a, b\,)$ において, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ が微分可能で, かつ, 区間 $[\,a, b\,]$ において $\varphi'(t)$ と $\psi'(t)$ が連続であるとき, 曲線 C は 滑らかな曲線 と呼ばれる．

(3) (41.2) において, 写像 C が単射であるとき, 即ち

$$(\varphi(s), \psi(s)) = (\varphi(t), \psi(t)) \iff s = t$$

が成り立つとき, C を 単純曲線 あるいは 単純な 曲線 と呼ぶ．

(4) $t = a, b$ に対応する点が一致するとき, 即ち,

$$(\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b))$$

が成り立つとき C は 閉曲線 と呼ばれる．

(5) 定義された区間内の有限個の点を除いて $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ がともに C^1 級である様な曲線を 区分的に滑らかな曲線 と呼ぶ．

(6) 単純な閉曲線を Jordan 曲線 と呼ぶ．

曲線は, $\mathbb{R}^2$ の単なる部分集合ではなく, 写像であつて, 2 つの曲線の（写像としての）像が同じでも異る曲線を表すことがある．さらにその 向き も重要である．
次の定理は, 自明に思はれるが, 厳密な証明は手間が掛かる．また種々の歴史がある．

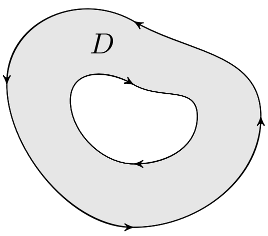
定理 41.3 （Jordan 曲線定理）C を Jordan 曲線とせよ. C の像の補集合は 2 つの互ひに素な連結成分から成り, 一方の成分は有界領域であり, 内部と呼ばれる. 他方の成分は非有界領域となり, 外部と呼ばれる. また, C は両成分（領域）の境界を成す.

証明 これの証明は, ここでは行はない. また特段の興味がない場合は, これを認めて進めばよい. 読み易い文献を挙げられないので, 証明を知りたい読者は各自で調べられたい. □

定義 41.4 以下の議論で必要な領域とその境界を定義する：

(1) Jordan 曲線 C の内部になつてゐる様な有界な領域 D について, C の向きを, D を左に見て進む方向づけ（向き）に（必要ならば）修正したものを D の境界と呼び, ∂D で表す.

(2) より一般的に, 有限個の互ひに交はらない Jordan 曲線の外部や内部の共通部分あるいは和集合をとる操作を, 何回か繰り返すことにより定義される領域 D についても, それらの境界を然るべく自然に定義する. その場合は ∂D は, 必要に応じて向きの反転を施した, いくかの Jordan 曲線として捉へられる.



2 つの滑らかな単純な有向曲線

$$
\begin{aligned}
&C_1 : (x, y) = (\varphi_1(t), \psi_1(t)) \quad (t : a \to b) \\
&C_2 : (x, y) = (\varphi_2(s), \psi_2(s)) \quad (s : c \to d)
\end{aligned}
\tag{41.5}
$$

があつて, これらの向きと像が一致すると仮定する. つまり

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_1(a), \psi_1(a)) = (\varphi_2(c), \psi_2(c)), \quad (\varphi_1(b), \psi_1(b)) = (\varphi_2(d), \psi_2(d)), \\
&\{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) \,|\, a \leqq t \leqq b\} = \{(\varphi_2(s), \psi_2(s)) \,|\, c \leqq s \leqq d\} \ \text{（集合として）}
\end{aligned}
$$

とする. 簡単のために, $({\varphi_1}'(t), {\psi_1}'(t)) = (0, 0)$ となる t と $({\varphi_2}'(s), {\psi_2}'(s)) = (0, 0)$ となる s は存在しないものとする. この様な C_1 と C_2 は互ひに同値であると称することにする.

以上のことを区分的に滑らかな単純曲線などに拡張できるが, それは読者にできることなので, 省略する.

41.2.　線積分と Green の定理

区分的に滑らかな有向曲線

$$C\ :\ x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t)\ \ (\,t : a\to b\,)$$

と C の像を含む領域で定義された連続函数 $f(x,y)$ について,

$$\int_C f(x,y)dx=\int_a^b f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t)dt,\quad \int_C f(x,y)dy=\int_a^b f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)dt$$

を C に沿ふ $f(x,y)$ の線積分と呼ぶ. さらに 2 つの函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ について, まとめて

$$\int_C f(x,y)dx+g(x,y)dy=\int_C f(x,y)dx+\int_C g(x,y)dy$$

と記すこが多い. 積分路 C が閉曲線であるとき, これは物理学の書物では

$$\oint_C f(x,y)dx+g(x,y)dy$$

と記されてゐることが多い.

補題 41.6　C_1 と C_2 を互ひに同値な（滑らかな）2 曲線とする. このとき

$$\int_{C_1} f(x,y)dx+g(x,y)dy=\int_{C_2} f(x,y)dx+g(x,y)dy.$$

このことは「線積分は積分路の媒介変数の選び方に依存しない」と言明される.

証明　C_1 と C_2 をそれぞれ

$$C_1 : (x,y)=(\varphi_1(t),\psi_1(t))\ \ (\,t : a_1\to b_1\,),$$
$$C_2 : (x,y)=(\varphi_2(s),\psi_2(s))\ \ (\,s : a_2\to b_2\,)$$

と記す. ここで, 常に $(\varphi_1(t),\psi_1(t))=(\varphi_2(s),\psi_2(s))$ となるとき, 即ち t と s の間に

$$t={\varphi_1}^{-1}\varphi_2(s),\ \ t={\psi_1}^{-1}\psi_2(s)$$

なる関係があるとき, s が $a_1\to b_1$ と動くに従つて t が $a_2\to b_2$ と動くから,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(x,y)dx&=\int_{a_1}^{b_1} f\big(\varphi_1(t),\psi_1(t)\big){\varphi_1}'(t)dt=\int_{a_2}^{b_2} f\big(\varphi_2(s),\psi_2(s)\big)\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}ds\\&=\int_{a_2}^{b_2} f\big(\varphi_2(s),\psi_2(s)\big)\frac{dx}{ds}ds=\int_{C_2} f(x,y)dx\end{aligned}$$

となる. $\displaystyle\int_{C_1} f(x,y)dy$ についても同様である. □

例 41.7　第 1 象限内の単位円の部分を反時計方向に廻る有向曲線 C は, 例へば $x=\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$, $(\,\theta : 0\to\frac{\pi}{2}\,)$, $(\,t : 0\to 1\,)$ と 2 通りに表せるが,

$$\int_C f(x,y)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta,\sin\theta)\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\int_0^1 f\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\Big)\,\frac{dx}{dt}\,dt.$$

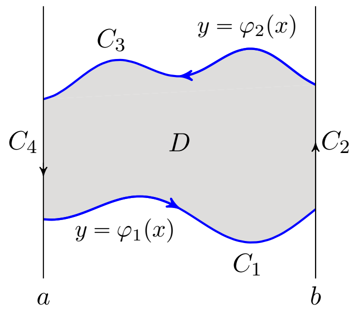
Green の定理とは, 次の定理のことである.

定理 41.8 D が有界な閉領域で, その有向境界 ∂D は, いくつかの滑かな Jordan 有向曲線 $C_1, \cdots, C_n$ で構成されてゐるとせよ. $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ は領域 D を含む開領域で定義された C^1 級の 2 変数函数とする. このとき, 次が成り立つ :

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy.$$

証明 まづ, 領域 D が単純な領域のときに示す. 即ち

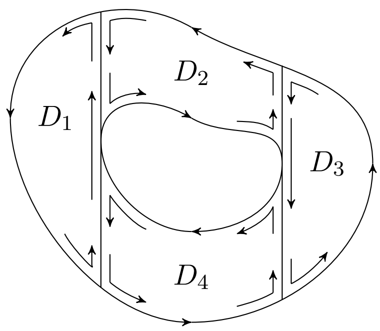
$$D = \{\,(x,y)\,|\,a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\,\}$$



と書けるとき, 線分 C_2 と C_4 においては媒介変数として y がとれる (右図) が $\dfrac{dx}{dy} = 0$ ゆゑ,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P(x,y)dx &= \int_a^b (P(x,\varphi_1(x))dx + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b,y)\frac{dx}{dy}\,dy \\ &\quad + \int_b^a (P(x,\varphi_2(x))dx + \int_{\varphi_2(a)}^{\varphi_1(a)} P(a,y)\frac{dx}{dy}\,dy \\ &= -\int_a^b \Big(P\big(x,\varphi_2(x)\big) - P\big(x,\varphi_1(x)\big)\Big)\,dx = -\int_a^b \Big[\,P(x,y)\,\Big]_{y=\varphi(x)}^{\varphi_2(x)} dx \\ &= -\int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy\Big)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy\end{aligned}$$

となり正しい.



D が一般の領域の場合は, 右図に例示した様に, y 軸に平行な線分により, それを有限個の単純な領域に分割できる. この図において, 各小領域 D_j の周囲 ∂D_j は鉛直な線分の部分では, 相互に行き交ふので, 線積分

$$\sum_j \int_{\partial D_j} P(x,y)dx$$

において, その部分の積分の総和は 0 となる. また, 各 D_j において主張が成り立つから

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx = \sum_j \int_{\partial D_j} P(x,y)dx = -\sum_j \iint_{D_j} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dxdy = -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dxdy$$

となつて, $Q(x,y) = 0$ の場合に定理が証明された.
横に単純な領域に割して同様な考察を行へば

$$\int_{\partial D} Q(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dxdy$$

が示される. □

例題 41.9 次の線積分を直接に計算せよ．また Green の定理を使って計算せよ．

$$\int_C (x+y)dx + xydy, \quad C : x = \cos t,\ y = \sin t \quad (t : 0 \to 2\pi).$$

解答 直接計算だと

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^{2\pi} \big((\cos t + \sin t)(-\sin t) + \sin t\,\cos t\,\cos t\big)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(-\cos t \sin t - \sin^2 t + \sin t\,\cos^2 t\big)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\cos^2 t - \frac{1}{2}\Big(t - \frac{1}{2}\sin 2t\Big) - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = -\pi.\end{aligned}$$

一方 $D = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\,\}$ に対し Green の定理を使ふと，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}xy - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right)dxdy = \iint_D (y-1)\,dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\sin\theta - 1)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\sin\theta - \frac{1}{2}r^2\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{3}\sin\theta - \frac{1}{2}\Big)d\theta = \left[-\frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = -\pi\end{aligned}$$

となり，確かに一致する． □

演 習 問 題

41.10 互ひに同値な 2 本の有向曲線（円の 4 分の 1）

$$C_1 : x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta \ \ (\theta : 0 \to \tfrac{\pi}{2});$$

$$C_2 : x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2} \quad (t : 0 \to 1)$$

について，次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1} xdx, \quad \int_{C_2} xdx.$

(2) $\displaystyle\int_{C_1} ydy, \quad \int_{C_2} ydy.$

41.11 有向曲線 $C : x = \cos t,\ y = \sin t \ \ (t : 0 \to 2\pi)$ について，次の線積分の値を ① 直接計算と ② Green の定理を用ゐた計算で求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C xdy.$　　(2) $\displaystyle\int_C y\,dx + xy^2\,dy.$

41.3. 変数変換公式の証明

ここで証明したい定理を再掲しておく.

> **定理 41.12**（定理 37.2）小節 37.1 に述べた記号と仮定の下で, 閉領域 D 上で重積分可能な函数 $f(x,y)$ について, 次の式が成り立つ:
> $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

証明 ここでは閉領域 D を内部に含むある開領域（定義は 23.8）G において, 次の仮定を満たす様な函数 $F(x,y)$ が存在する場合に限り証明するが, 応用上はこの仮定は強いものではない.

仮定: G 上で偏導函数 F_x, F_y が存在し, これらは G 上で連続で, $F_x(x,y) = f(x,y)$.

さて, Green の定理 41.8 を

$$P(x,y) = 0, \quad Q(x,y) = F(x,y)$$

として用ゐると

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D F_x(x,y)dxdy \underset{\text{Green の定理}}{=} \int_{\partial D} F(x,y)dy. \tag{41.13}$$

ここで 37.2 の状況を思ひ出す: 領域 E が領域 D に

$$E \to D, \quad (u,v) \mapsto \big(x(u,v),\, y(u,v)\big)$$

により写されてゐる. 境界 ∂E を t を媒介変数とする有向曲線として表しておく:

$$u = u(t),\ v = v(t) \quad (t : \alpha \to \beta).$$

もちろん始点と終点は一致してゐる. このとき, 像として得られる有向曲線

$$x = x\big(u(t), v(t)\big),\ y = y\big(u(t), v(t)\big) \ \ (t : \alpha \to \beta)$$

は ∂D を表すか, さもなくば, その向きを逆転させた有向曲線（$-\partial D$ と記す）を表す. いづれにしても

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt} \tag{41.14}$$

であるから (41.13) の右辺に続けて

$$\begin{aligned}
&= \int_\alpha^\beta F(x,y)\frac{dy}{dt}dt \\
&= \int_\alpha^\beta F(x,y)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt \ \ (\because\ (41.14)) \\
&= \pm\int_{\partial E} F(x(u,v), y(u,v))\left\{\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right\}.
\end{aligned}$$

ここで $\pm$ は, 有向曲線 ∂E の像が ∂D であるか $-\partial D$ であるかに応じて $+$ または $-$ をとるのである. 以下の $\pm$ もこの意味である.

上に続けて

$$
\begin{aligned}
&= \pm \int_{\partial E} F(x,y) y_u \, du + F(x,y) y_v \, dv \\
&= \pm \iint_E \left(\frac{\partial}{\partial u}\big(F(x,y)\, y_v\big) - \frac{\partial}{\partial v}\big(F(x,y)\, y_u\big) \right) dudv \\
&= \pm \iint_E \Big(\big(F_x(x,y)\, x_u + F_y(x,y)\, y_u\big)\, y_v + F(x,y)\, y_{vu} \\
&\qquad - \big(F_x(x,y)\, x_v + F_y(x,y)\, y_v\big)\, y_u + F(x,y)\, y_{uv} \Big)\, dudv \\
&= \pm \iint_E F_x(x,y)(x_u y_v - x_v y_u)\, dudv \\
&= \pm \iint_E f(x,y) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv
\end{aligned}
$$

となる. ここで, 函数 $f(x,y)$ を定数函数 1 とり, E に含まれる任意の微小領域 E_1 およびその像 D_1 についても, 同様の計算で

$$
\iint_{D_1} 1\, dxdy = \pm \iint_{E_1} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv
$$

が成り立つから, $\pm \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ でなければならないことがわかる. 即ち

$$
\pm \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|
$$

となる. 以上で 37.2 が証明された. □

第 8 章　微分方程式

微分方程式とは, 未知の函数 $y = f(x)$ について, $f(x)$ およびその導函数, 高次導函数に関する等式のことである. この章では, 未知の函数 $f(x)$ の微分方程式が与へられたとき, そこから $f(x)$ を具体的に求めること (微分方程式を解くといふ) について学ぶ.

§ 42.　正規形の微分方程式

一般に, 函数 $y = f(x)$ とその導函数 y', y'', $\cdots$ の間の関係式

(42.1)
$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

を 微分方程式 と称する. ここで, もちろん (42.1) には $n+1$ 次以上の導函数が現れないものとしてゐるがこの状況のとき (42.1) を n 階の微分方程式 と称する. この微分方程式を満たす函数 $y = f(x)$ は (42.1) の 解 といはれる.

例 42.2　(1) $y' + xy = 0$ は 1 階の微分方程式である.
(2) $yy'' - 3y'y + x^2 + 1 = 0$ は 2 階の微分方程式である.

以下では

(42.3)
$$y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

の形に書ける微分方程式を扱ふ. この形の微分方程式を 正規形 [46] と呼ぶ. ここで $F(x, z_0, z_1, \cdots, z_{n-1})$ は $n+1$ 個の独立変数 $(x, z_0, z_1, \cdots, z_{n-1})$ のある函数である.

定理 42.4　(42.3) の右辺について $n+1$ 変数の函数 $F(x, z_0, z_1, \cdots, z_{n-1})$ が点 $(a, b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$ の近傍において C^1 級であるとき, $x = a$ の近傍で定義されて (42.3) および

$$f(a) = b_0,\ f'(a) = b_1,\ \cdots,\ f^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$$

を満たす解 $y = f(x)$ が存在し, かつ唯一つしか存在しない.

証明　この証明はやや手間が掛かるので, ここでは述べない. 必要であれば, 例へば, 三宅 [3], pp.2-6 に詳しい証明があるので, 参照されたい. 以下, 具体的な解法を述べていくが, その過程で, この定理の主張は腑に落ちるであらう. □

定義 42.5　任意性をもつ定数 C_0, C_1, $\cdots$, C_{n-1} があつて (42.1) の解が $y = f(x, C_0, C_1, \cdots, C_{n-1})$, 或いは, $g(x, y, C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}) = 0$ （陰函数表示）と表されるとき, これを (42.1) の 一般解 と呼ぶ. このとき, C_0, C_1, $\cdots$, C_{n-1} の値を指定して得られる解を 特殊解 または 特解 と呼ぶ. 与へられた微分方程式が, 一般解の他に, 任意定数を含まない解を持つとき, その解を 特異解 と呼ぶ.

[46] これは式の形を称した言葉であつて, 正規形でない $G(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ の様な形の方程式を変形して正規型に帰着されることはよく起る.

§ 43. 変数分離型の微分方程式

43.1. 変数分離型

ここでは, 変数分離型と呼ばれる最も簡単な微分方程式の場合に限つて解説する. 始めに 2 つ程, 例を挙げる.

例題 43.1 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす函数 $y = f(x)$ を求めよ.

解答 y が恒等的に 0 なる函数のとき, 与式が成り立つからそれは解の 1 つである. y が恒等的には 0 でないとし, $y \neq 0$ なる区間で考察する. このとき, 与式から,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1.$$

両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx.$$

$$\therefore\ \log|y| = x + C.$$

$$\therefore\ y = \pm e^C e^x.$$

$$\therefore\ y = A\,e^x \quad (A \neq 0 \text{ は定数}).$$

ここで, 最初に得た函数 $y = 0$ を合はせれば, 結局 A を任意の実数として,

$$y = A\,e^x$$

が解である. □

例題 43.2 次の微分方程式を解け:

$$y' - xy = 2x.$$

解答 定数函数 $y = -2$ を除外して, 与式から, 以下の様に変形していく.

$$y' = x(y+2).$$

$$\frac{y'}{y+2} = x.$$

$$\int \frac{y'}{y+2}\,dx = \int x dx.$$

$$\int \frac{1}{y+2}\,dy = \int x dx.$$

$$\log|y+2| = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$y + 2 = \pm e^C e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

$$y + 2 = Ae^{\frac{1}{2}x^2} \quad (A \neq 0).$$

$$\therefore\ y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} - 2$$

を得る. ここで $A = 0$ の場合（定数函数 $y = -2$）も解とわかるので, 任意の解は A を任意の実数として,

$$y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} - 2$$

となる. □

定義 43.3 次の形の微分方程式を変数分離型と呼ぶ:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

但し, $g(x)$ や $h(y)$ は各変数に関して（区分的に）連続な函数である.

変数分離型の微分方程式は例 43.1 や 43.1 と同様な方法で解くことができる:

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x).$$

$$\therefore \int \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx.$$

$$\therefore \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx.$$

ここから, 両辺の不定積分が求まれば,

“y の式”＝“x の式”＋“積分定数”

が得られる. これを y について解けば（解かなくても陰函数定理により）所望の函数 $y = f(x)$ が得られたことになる.

例題 43.4 $f(x)$ は区間 $[0,\infty)$ で定義された C^1 級の単調増加函数とする. 曲線 C : $y = f(x)$ は点 A(0,1) を通り, 点 A から C 上の任意の点 $\mathrm{P}(a, f(a))$ までのこの曲線の長さは, C, x 軸, y 軸, および直線 $x = a$ で囲まれる部分の面積に等しい. このとき函数 $f(x)$ を求めよ.

解答 題意より, 定義域 $[0,\infty)$ において $f(x) \geqq 1 > 0$ であるので, 状況を式で表すと, 任意の a について

$$\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

これの両辺を a で微分すると（微分積分学の基本定理 30.13 より）

$$\sqrt{1 + f'(a)^2} = f(a)$$

a を x に書き換へて変形し $y = f(x)$, $y' = f'(x)$ を使つて書くと

$$1 + {y'}^2 = y^2. \quad \therefore\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1} \ \text{（これは変数分離型）}.$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,dy = \int dx. \quad \therefore\ \log\left|\sqrt{y^2-1} + y\right| = x + C.$$

仮定から $y = 1$ のとき $x = 0$ なので $C = 0$. よつて $y > 0$ を考慮に入れて

$$x = \log\left(\sqrt{y^2-1} + y\right). \quad \therefore\ e^x = \sqrt{y^2-1} + y. \quad \therefore\ e^{-x} = -\sqrt{y^2-1} + y.$$

$$\therefore y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

を得る. □

43.2. 斉次型の微分方程式

定義 43.5 次の形の微分方程式を 斉次型 と呼ぶ:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

斉次型の微分方程式は $\dfrac{y}{x} = u$ （つまり $y = ux$）とおくことで, u に関する変数分離型の微分方程式 $xu' = F(u) - u$ になる.

例 43.6 微分方程式

$$xy' = 2y - x$$

を解く. これは斉次型だから $y = ux$ とおくと, $y' = u'x + u$ ゆゑ, 与式は

$$x(u'x + u) = 2ux - x. \quad \therefore\ u'x + u = 2u - 1. \quad \therefore\ u'x = u - 1.$$

$$\therefore \int \frac{du}{u-1} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\log|u-1| = \log|x| + C. \quad \therefore\ u - 1 = Ax.\ (A = \pm e^C)$$

$$\therefore\ y\,(= ux) = Ax^2 + x,\ （A \neq 0 \text{ は任意定数}）.$$

しかるに, この結果で $A = 0$ の場合の $y = x$ も解であることがわかるから, 求める解は

$$y = Ax^2 + x,\ （A \text{ は任意定数}）$$

である.

演 習 問 題

43.7 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = x^2 y$.

(2) $y' = \dfrac{y}{x^2+1}$.

(3) $y' = xy(x+1)$.

(4) $y' - 2xy = y$.

(5) $xy' - 2y = xy$.

43.8 次の微分方程式を解け. (Hint: 右辺の微分.)

(1) $y' + 2x = y + x^2 + 1$.

(2) $y' + 1 = e^{y+x}$.

43.9 次の斉次型の微分方程式を解け.

(1) $xy' + y = x$, 但し $x = 1$ のとき $y = 1$. 〔≒p.129, 2.7 A2 (1)〕

(2) $xy' - x - y = 0$, 但し $x = 1$ のとき $y = 2$. 〔≒p.129, 2.7 A2 (2)〕

43.10 区間 $[0, \infty)$ で定義された C^1 級の函数 $y = f(x)$ の graph C について, C 上の任意の点 P での C の接線を ℓ とし, ℓ と x 軸との交点を A, ℓ と y 軸との交点を B とせよ. このとき常に線分 AB の中点が P であるといふ. $f(x)$ を求めよ. 但し $f(1) = 2$ とする. 〔= p.129, 2.7 B〕

§ 44. 全微分方程式

2 変数 x, y の C^1 級函数 $z = f(x,y)$ が与へられたとき, 全微分 dz は

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

で与へられるのであつた（24.20 を見よ）. ここで, C を定数として, もし x, y の間に $f(x,y) = C$ なる関係（陰函数）があつたとすると

$$f_x(x,y) + f_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

である. 或いは x, y の変化に対して $z = f(x,y)$ が変化しないことから, これの全微分が 0 であるので

$$f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = 0$$

であるといふことができる. これらは

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \quad \text{或いは} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}$$

といふ関係式を書き代へたものと考へてもよい.
そこで, ここでは次の様な方程式を考察する.

定義 44.1 いま, 2 変数 x, y の連続函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ が与へられたとし,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{44.2}$$

即ち

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{或いは} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

を満たす様に x と y の関係式を決定せよ, といふ問題を考へる. これを 2 変数の <u>全微分方程式</u> と呼ぶ.

ここで (44.2) について, もし

$$P(x,y) = F_x(x,y), \quad Q(x,y) = F_y(x,y)$$

となる 2 変数函数 $F(x,y)$ を見出せたなら, (44.2) の一般解は

$$F(x,y) = C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

となる. 例を挙げる:

例題 44.3 次の全微分方程式を解け:

$$(3x^2y + 2x)dx + (3x^3 + 2y)dy = 0.$$

解答 いま

$$F(x,y) = x^3y + x^2 + y^2$$

を考へると, 与式は

$$F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = 0$$

と書けて, 一般解

$$x^3y + x^2 + y^2 = C, \quad (C \text{ は定数})$$

が得られた. □

しかし, 一般には 44.3 の様な $F(x,y)$ は存在しない. そこで, 以下に一例を挙げる.

例題 44.4 $a>0$ を定数とし, 次の全微分方程式を解け:

$$\frac{1}{a}\,dx+\frac{x}{y}\,dy=0.$$

(ここで $x=T$ 絶対温度, $y=V$ 体積, $a=\frac{C_P}{C_V}-1$ (但し C_P は定圧 mol 比熱, C_V は定積 mol 比熱) とすると, 熱力学で Poisson(ポワッソン) の法則を導く際に現れる形の方程式である)

解答 $f_x(x,y)=a,\quad f_y(x,y)=\frac{x}{y}$ なる C^2 級の $f(x,y)$ は存在しない. なぜなら, もし存在すれば

$$f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yx}(x,y)=-\frac{1}{y}$$

となるが, それは 25.4 に反する. しかし, 両辺に $\frac{a}{x}$ を掛けて

$$-\frac{1}{x}\,dx-\frac{a}{y}\,dy=0$$

としてみれば, これは

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log|x|+a\log|y|)dx-\frac{\partial}{\partial y}(\log|x|+a\log|y|)dy=0$$

と書けるので

$\log|x|+a\log|y|=C'$ (C' は任意の定数),

$\therefore\ xy^a=C$ (C は任意の定数)

となつて, 一般解が得られる. □

補題 44.5 与へられた 2 つの C^1 級函数 $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ について

$$f_x(x,y)=P(x,y),\quad f_y(x,y)=Q(x,y)$$

となる C^2 級函数 $f(x,y)$ が存在するためには, 次式の成立が必要十分である:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y).$$

証明 必要性は 25.4 により明らか. 十分性を示すために定点 (a,b) をとり, 線積分

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{44.6}$$

を考へる. いま (a,b) から (x,y) に至る 2 つの積分路 C_1, C_2 について C_1 を辿つたあと C_2 を逆向きに辿つて (a,b) に戻る周回路を C_1-C_2 と書くことにする. いま C_1-C_2 で囲まれた領域を D と書くと, Green の定理 41.8 と仮定を使ふと

$$\int_{C_1-C_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

$$\therefore\int_{C_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{C_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

がわかる. つまり (44.6) は積分路には依らないで (始点と) 終点 (x,y) だけで定まる. ゆゑに, 新たな函数

$$f(x,y)=\int_{(a,b)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{44.7}$$

が得られた. このとき線積分の定義によつて

$$f_x(x,y)=P(x,y),\quad f_y(x,y)=Q(x,y) \tag{44.8}$$

がわかる (問 44.9). $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ は C^1 級ゆゑ, $f(x,y)$ は C^2 級である. よつて証明が完成した. □

問 44.9 線積分 (44.7) の積分路を C とする. C が最後に (x,y) に x 軸に平行な線分を辿つて到着する状況を考へ, 線積分の定義（§41.2 の冒頭）に基き, (44.8) の第 1 式を証明せよ. また, C が最後に (x,y) に y 軸に平行な線分を辿つて到着する状況を考へ, 上と同様に (44.8) の第 2 式を証明せよ.

定義 44.10 44.5 の仮定が成立してゐるとき, 全微分方程式

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{44.11}$$

は完全微分型と呼ばれる.

与へられた全微分方程式 (44.11) が完全微分型でなくても, 両辺に, ある函数 $R(x,y)$ を掛けて, 完全微分型

$$\begin{gathered} f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy=0 \\ (\ f_x(x,y)=P(x,y)R(x,y),\quad f_y(x,y)=Q(x,y)R(x,y)\ ) \end{gathered} \tag{44.12}$$

にできれば, この方程式は解ける. ともかく, 次の定義をしやう.

定義 44.13 ある函数 $R(x,y)$ を (44.2) の両辺に掛けて完全微分型にできるとき, $R(x,y)$ を全微分方程式 (44.2) の積分因子と呼ぶ.

例 44.4 では $\frac{1}{x}$ が（適切な）積分因子だつたわけである.

定理 44.14* (44.2) において, 領域 D において $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ はともに C^2 級であるとする. このとき (44.2) は積分因子を持つ. 特に (44.2) は解を持つ.

証明 厳密な証明は大変なので, 骨格のみ述べる. 簡単のために D 上で $Q(x,y)\neq 0$ とする. さすれば

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

は正規形ゆゑ 42.4 により一般解が存在する. 一般解は一つの任意定数（C とする）を含むから, ある 3 変数函数 $F(X,Y,Z)$ により

$$F(x,y,C)=0$$

の形で得られる. 一般解の意味から, この関係式は真に C を含み, $\frac{\partial F}{\partial Z}(x_0,y_0,C_0)\neq 0$ である点 (x_0,y_0,C_0) が存在する. この任意定数 C としては, 例へば $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$ を取ることができて, $F(x,y,C)$ は C について C^1 級であるとしてよい. このことと陰函数定理 26.23 をより一般化した定理 [47] から

$$C=f(x,y)$$

といふ関係式が得られる. このとき

$$f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy=0$$

は, 元の方程式 (44.2) と同値な方程式である. よつて,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

となる. ゆゑに

$$\frac{f_x(x,y)}{P(x,y)}=\frac{f_y(x,y)}{Q(x,y)}$$

となる. この等しい両辺を与へる函数を $R(x,y)$ とするとき

$$f_x(x,y)=P(x,y)R(x,y),$$
$$f_y(x,y)=Q(x,y)R(x,y)$$

となるので, $R(x,y)$ は積分因子である.
ちなみに [8b], §9.3 に別証がある. □

[47] 26.23 は, 3 つ以上の変数の場合に一般化されて, $F(x_1,\cdots,x_m,z)=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(a_1,\cdots,a_m,c)\neq 0$ とから, $(a_1,\cdots,a_m)$ の近傍で C^1 級の函数 $z=G(x_1,\cdots,x_m)$ が一意的に存在して, $c=G(a_1,\cdots,a_m)$ かつ $F(x_1,\cdots,x_m,G(x_1,\cdots,x_m))=0$ となることが帰結される. 詳細は [6] II の p.135, p.222 を参照されたい.

注意 44.15　しかし, (44.2) を実際に解くには, 積分因子を掛けた後の (44.12) から $f(x, y)$ が具体的に求められなければならない. つまり, その様なうまい積分因子を見出す必要がある. とはいへ, 一般には積分因子を見出すこと自体が困難である. 例へば [2] の p.162 に発見するために参考になることが少し書かれてゐる.

例題 44.16　次の完全微分型でない全微分方程式を解け：

$$(xy - x - 1)dx + (x^2 + 2yx)dy = 0.$$

解答　積分因子の一つとして $\frac{1}{x}$ がある. 実際, これを両辺に掛けると

$$(y - 1 - \tfrac{1}{x})dx + (x + 2y)dy = 0 \tag{44.17}$$

となるが,

$$\tfrac{\partial}{\partial y}(y - 1 - \tfrac{1}{x}) = 1, \quad \tfrac{\partial}{\partial x}(x + 2y) = 1$$

である. (44.17) から, 一般解

$$xy - x - \log x + y^2 = C \quad (C \text{ は定数})$$

を得る. □

演 習 問 題

44.18　次の全微分方程式が完全微分型であることを確認し, それを解け.

(1) $(y^2 + 1)dx + 2xydy = 0.$

(2) $\left(\frac{2x}{x^2+y^2} + y + 1\right)dx + \left(\frac{2y}{x^2+y^2} + x\right)dy = 0.$

44.19　次の全微分方程式は非完全微分型である. 括弧内に積分因子を挙げておいた. これを利用して解け.

(1) $(2xy^2 + y^3 - y)dx + (y^4 + 1)xdy = 0 \quad \left(\frac{1}{y^2}\right).$

(2) $(1 - y^2)dx + (2xy - y^2 - 1)dy = 0 \quad \left(\frac{1}{(x-y)^2}\right).$

§ 45. 定数係数の線形微分方程式

ここまで述べてきた型の微分方程式以外で, 解法を一般的に扱へる微分方程式は, 定数係数の線形微分方程式 である. ある程度まとまつた扱ひについては, たとへば [2] の第 7 章などを見ていただきたい.

Text [0] の §**2.14** において Laplace(ラプラス) 変換が説明されてゐる. Laplace 変換は, 線形微分方程式をほぼ代数方程式に置き代へて計算する方法の一つであるが, 以下の様な 記号解法 とも呼ばれる方法は簡明であるので, まづは, そちらを述べることとする. Laplace 変換については §47 で説明する.

定義 45.1 $A_0(x)$, $A_1(x)$, $\cdots$, $A_n(x)$, $g(x)$ が区間 I で定義された既知の函数であるとき, 微分方程式

$$A_0(x)\,y^{(n)} + A_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + A_n(x)\,y = g(x) \tag{45.2}$$

を 線形微分方程式 と称する. 左辺のすべての係数が定数である場合, 即ち,

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \cdots + A_n y = g(x), \quad (A_1, \cdots, A_n \text{ は定数}) \tag{45.3}$$

なる形の方程式を 定数係数の線形微分方程式 と称する. また $g(x)$ が函数 0 であるとき, 即ち

$$y^{(n)} + A_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + A_n(x) y = 0 \tag{45.4}$$

なる形の方程式を 斉次型の線形微分方程式 と称する. (43.5 の用語と混同しない様に)

つぎの定理は線形微分方程式を論ずるときの基本定理と呼ぶべきものである.
証明は, 例へば [3], pp. 69-70 を見ていただきたい.

定理 45.5 次の (1) 〜 (3) が成り立つ:

(1) (45.2) には少くとも 1 つの解が存在する. それを $\varphi(x)$ とする.

(2) 斉次形の線形微分方程式 (45.4) の解の全体は $\mathbb{R}$ 上の n 次元 vector 空間をなす. その 基底 (あるいはその 1 つ 1 つ) は (45.4) の 基本解 と呼ばれる. 即ち, (45.4) の n 個の解 $u_1(x)$, $\cdots$, $u_n(x)$ があつて (45.4) の解の全体は

$$\mathbb{R}\,u_1(x) + \cdots + \mathbb{R}\,u_n(x)$$

となる. このとき $u_1(x)$, $\cdots$, $u_n(x)$ は (45.4) の 基本解 と呼ばれる.

(3) さらに (45.2) の解の全体は

$$\varphi(x) + \mathbb{R}\,u_1(x) + \cdots + \mathbb{R}\,u_n(x)$$

となる. つまり c_1, $\cdots$, c_n を任意の定数として

$$\varphi(x) + c_1\,u_1(x) + \cdots + c_n\,u_n(x)$$

が (45.2) の一般解である.

次 page 以降, §46 において, 演算子による記号解法について説明し, その後, §47 において, text [0], §**2.14** にある Laplace 変換を用いた解法について説明する.

§ 46.　線形微分方程式の演算子による記号解法

46.1.　微分演算子

以下, 記号を簡単にするために $D = \frac{d}{dx}$ と書く. これにより x の函数 $f(x)$ について, その導函数は $f'(x) = Df(x)$ と書かれる. また $D^2 = DD = \frac{d^2}{dx^2}$, $D^3 = D^2D = DD^2 = \frac{d^3}{dx^3}$, $\cdots$ と書くことにして, 高次導函数も $f''(x) = D^2f(x)$, $f'''(x) = D^3f(x)$, $f^{(k)}(x) = D^kf(x)$ などと書くことにする. さらに, 文字 t の実数係数の多項式

$$F(t) = a_0t^m + a_1t^{m-1} + \cdots + a_{m-1}t + a_m$$

が与へられたとき

$$F(D) = a_0D^m + a_1D^{m-1} + \cdots + a_{m-1}D + a_m,$$
$$F(D)y = a_0D^my + a_1D^{m-1}y + \cdots + a_{m-1}Dy + a_my$$

と表す. これにより, 例へば, もう 1 つの函数 $q(x)$ について

$$a_0\,y^{(m)} + a_1\,y^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}\,y' + a_my = q(x)$$

なる y に関する微分方程式は

$$F(D)y = a_0D^my + a_1D^{m-1}y + \cdots + a_{m-1}Dy + a_my = q(x)$$

などと書かれる訳である. この $F(D)$ の様に書かれるものを微分演算子と呼ぶことがある. また, 容易にわかる通り, t についての 2 つの多項式 $F(t)$ と $G(t)$ について,

$$F(D)\big(G(D)y\big) = \big(F(D)G(D)\big)y = \big(G(D)F(D)\big)y = G(D)\big(F(D)y\big)$$

である. しかし,

$$D(xDy) = (Dx)(Dy) + xD^2y, \quad DD(xy) = (D^2x)y + 2(Dx)(Dy) + xD^2y$$

であるから $D(xDy) \neq D^2(xy)$ である. また, $D(xDy)$ を $DxDy$ と書くと $(Dx)(Dy)$ と混同したりもするので, $F(D)g(x)G(D)f(x)$ の様な記法には注意が必要であり, できるだけ括弧を付けて混乱しない様にすべきである.

46.2.　代数的な事項の準備

以下に述べる命題は, 次の節で必要になる. 証明には代数学の知識が必要なので, ここでは述べない. (互除法を繰り返して使用する方法で示せるが ideal の概念を利用する方が簡明.)

命題 46.1　文字 t の k 本の多項式 $G_1(t)$, $G_2(t)$, $\cdots$, $G_k(t)$ が与へられたとし, これらの最大公約数は 1 であると仮定する. このとき

$$A_1(t)G_1(t) + A_2(t)G_2(t) + \cdots + A_k(t)G_k(t) = 1$$

となる多項式 $A_1(t)$, $A_2(t)$, $\cdots$, $A_k(t)$ が存在する.

証明は, 例へば筆者の講義録「線形代数学」の 10.3.6 に述べてある.

46.3. 線形微分方程式の解法 1

斉次型で定数係数の微分方程式を解く方法を説明する. まづ次の定理が基本になる.

定理 46.2 与へられた k 個の実数係数の多項式 $F_1(t)$, $F_2(t)$, $\cdots$, $F_k(t)$ はどの 2 つも互ひに素であるとする. $y = y(x)$ が微分方程式

(46.3) $$F_1(D)F_2(D)\cdots F_k(D)y(x) = 0$$

の解であるためには, $F_j(D)u_j(x) = 0$ ($1 \leqq j \leqq k$) なる函数 $u_j(x)$ を用ゐて

(46.4) $$y(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x)$$

と書けることが必要十分である.

証明 以下では, 各 $1 \leqq j \leqq k$ に対して, $F_1(t)$, $F_2(t)$, $\cdots$, $F_k(t)$ のうち, $F_j(t)$ 以外の $k-1$ 個を掛けて得られる多項式を $G_j(t)$ とする.

Step 1. 始めに (46.4) の様に表された $y(x)$ が (46.3) を満たすことは, 各 j について $F_1(D)\cdots F_k(D)u_j = G_j(D)F_j(D)u_j = 0$ となることから直ちに示される.

Step 2. 仮定より

$$G_1(t),\ G_2(t),\ \cdots,\ G_k(t)$$

の最大公約数は 1 である. よつて 46.1 から

$$A_1(t)G_1(t) + A_2(t)G_2(t) + \cdots + A_k(t)G_k(t) = 1$$

となる多項式 $A_j(t)$ が存在する. いま, (46.3) の任意の解 $y(x)$ ととり, 各 $1 \leqq j \leqq k$ に対して,

$$u_j = A_j(D)G_j(D)y$$

とおく. このとき

$$F_j(D)u_j = G_j(D)A_j(D)F_j(D)y = A_j(D)F_1(D)F_2(D)\cdots F_k(D)y(x) = 0$$

となる. 一方

$$\begin{aligned} y &= \big(A_1(D)G_1(D) + A_2(D)G_2(D) + \cdots + A_k(D)G_k(D)\big)y \\ &= A_1(D)G_1(D)y + A_2(D)G_2(D)y + \cdots + A_k(D)G_k(D)y \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_k \end{aligned}$$

である. これで主張が示された. □

例題 46.5 微分方程式 $y'' - y = 0$ を解け.

解答 与式は $(D-1)(D+1)y = 0$ と書けて $t-1$ と $t+1$ は互ひに素である. 方程式 $(D-1)y = 0$ は $y' = y$ を意味し, これの解は $y = C_1e^x$ (C_1 は定数) であるし, 方程式 $(D+1)y = 0$ は $y' = -y$ を意味し, これの解は $y = C_2e^{-x}$ (C_2 は定数) であるから, 求める解は

$$y = C_1e^x + C_2x^{-x} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意の定数})$$

となる. □

46.4. 線形微分方程式の解法 2

不定積分の一般化. t の多項式 $F(t)$ と函数 $q(x)$ に対して

$$F(D)y = q(x) \tag{46.6}$$

の解の一つを

$$\frac{1}{F(D)}q(x) \quad \text{または} \quad F(D)^{-1}q(x)$$

と表す. これは $Dy = q(x)$ の解が $q(x)$ の不定積分であることの一般化である :

$$\frac{1}{D}q(x) = \int q(x)dx.$$

(46.6) を満たす函数を一つ得ることができれば, 目的である線形微分方程式を解くことができる. 後の 46.20 などを参照.

命題 46.7 a を定数, $F(t)$ を t の多項式とする. 次が成り立つ:

$$\frac{1}{F(D)}q(x) = e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}\bigl(e^{-ax}q(x)\bigr).$$

証明 いま $p(x) = \dfrac{1}{F(D+a)}\bigl(e^{-ax}q(x)\bigr)$ とおくと, $q(x) = e^{ax}F(D+a)p(x)$ であるから, 与式は

$$\bigl(q(x) = \bigr)\, e^{ax}F(D+a)p(x) = F(D)\bigl(e^{ax}p(x)\bigr)$$

と書ける. これが示されればよいが, $F(t)$ は多項式なので, $F(D) = D^m$ （m は自然数）についての

$$e^{ax}(D+a)^m p(x) = D^m\bigl(e^{ax}p(x)\bigr) \tag{46.8}$$

が証明できればよい. これは帰納法で示される. すぐ下で問とする. □

問 46.9 (46.8) を証明せよ.

問 46.10 m を 0 または自然数とせよ.

$$D^m(xy) = (mD^{m-1} + xD^m)y \tag{46.11}$$

となることを示せ. さらにこれから, 多項式 $F(t)$ について

$$F(D)(xy) = \bigl(F'(D) + xF(D)\bigr)y \tag{46.12}$$

となることを示せ. 但し $F'(t)$ は $F(t)$ を t で微分して得られる多項式を表す.

命題 46.13 $F(t)$ を t の多項式, m を自然数とし, $F(D)^m y = 0$ とする. このとき
$$F(D)^{m+1}(xy) = 0.$$

証明 (46.12) の $F(D)$ として $F(D)^{m+1}$ を採つて, 以下の様に計算する :
$$\begin{aligned} F(D)^{m+1}(xy) &= \big((m+1)F(D)^m F'(D) + xF(D)^{m+1}\big)y \\ &= \big(m+1)F'(D) + xF(D)\big)F(D)^m y. \end{aligned}$$
ここで, $F(D)$ と $F'(D)$ は共に多項式ゆゑ, 可換であることに注意せよ. 最後の式は仮定により 0 である. □

注意 46.14 上の 46.13 から, $F(D)y = 0$ の基本解が $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ であれば,
$$(C_{j0} + C_{j1}x)y_j \quad (j = 1, \cdots, k)$$
が $F(D)^2 y = 0$ の基本解であることがわかる. 同様に
$$(C_{j0} + C_{j1}x + C_{j2}x^2)y_j \quad (j = 1, \cdots, k)$$
が $F(D)^3 y = 0$ の基本解である. 一般に
$$(C_{j0} + C_{j1}x + \cdots + C_{j2}x^{m-1})y_j \quad (j = 1, \cdots, k)$$
が $F(D)^m y = 0$ の基本解であることがわかる.

命題 46.15 a を定数とする. 次が成り立つ:
$$\frac{1}{D-a}q(x) = e^{ax}\int e^{-ax}q(x)dx.$$
特に, $q(x) = 0$ (定数函数) の場合を考へれば $(D-a)y = 0$ の解が
$$Ce^{ax} \quad (C \text{ は定数})$$
となることがわかる.

証明 右辺に D を作用させると,
$$\begin{aligned} D\left(e^{ax}\int e^{-ax}q(x)dx\right) &= ae^{ax}\int e^{-ax}q(x)dx + e^{ax}e^{-ax}q(x) \\ &= ae^{ax}\int e^{-ax}q(x)dx + q(x) \end{aligned}$$
であるから
$$(D-a)\left(e^{ax}\int e^{-ax}q(x)dx\right) = q(x)$$
である. これが示したいことであつた. □

命題 46.16　$F(t)$ は 2 次式であるとし, 2 次方程式 $F(t)=0$ は虚数解を持つとして, その 2 解を $\alpha+\beta\boldsymbol{i}$, $\alpha-\beta\boldsymbol{i}$ （α, β は実数）とせよ．このとき

$$F(D)y=0$$

の一般解は

$$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x\quad (C_1 \text{ と } C_2 \text{ は定数})$$

で与へられる．

証明　$b=-2\alpha$, $c=\alpha^2+\beta^2$ とおけば, 仮定より 0 でない定数 a があつて

$$F(t)=a(t^2+bt+c)$$

と書ける．もし主張が $a=1$ が示されれば, 任意の $a\neq 0$ についても成り立つので, $a=1$ について証明する．積の微分法により

$$\begin{aligned} D(e^{\alpha x}\cos\beta x)) &= \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ D^2(e^{\alpha x}\cos\beta x) &= \alpha^2e^{\alpha x}\cos\beta x-2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos\beta x+\beta^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ \therefore\ (D^2-bD+c)(e^{\alpha x}\cos\beta x) &= 0. \end{aligned}$$

同様に

$$(D^2-bD+c)(e^{\alpha x}\sin\beta x)=0$$

である．$e^{\alpha x}\cos\beta x$ と $e^{\alpha x}\sin\beta x$ は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立なので, 45.5(2) によつて, 主張が成り立つ．□

定理 46.17　m を自然数とする．次が成り立つ．
(1) a を定数とする．微分方程式 $(D-a)^my=0$ の一般解は

$$(C_0+C_1x+\cdots+C_{m-1}x^{m-1})e^{ax}$$

で与へられる．ここで C_0, C_1, $\cdots$, C_{m-1} は定数である．
(2) $F(t)$ は 2 つの虚数解 $\alpha\pm\beta\boldsymbol{i}$ $(\beta\neq 0)$ を持つ t の 2 次式とする．微分方程式 $F(D)^my=0$ の一般解は

$$\begin{aligned} &(A_0+A_1x+\cdots+A_{m-1}x^{m-1})e^{\alpha x}\cos\beta x \\ &\quad +(B_0+B_1x+\cdots+B_{m-1}x^{m-1})e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

で与へられる．ここで A_1, $\cdots$, A_{m-1}, B_1, $\cdots$, B_{m-1} は定数である．

証明　(1) 46.13 と 46.15 を用ゐれば直ちに示される．或いは, D^my の一般解が

$$(C_0+C_1x+\cdots+C_{m-1}x^{m-1})$$

であることに注意して, 46.7 の $F(t)$ を $(t-a)^m$ として用ゐても示される．
(2) 46.13 と 46.16 を用ゐれば直ちに示される．□

例 46.18 微分方程式 $(D-3)^2(D+1)y=0$ の一般解を求めてみる．それは 46.2 によつて，$(D-3)^2y=0$ の解と $(D+1)y=0$ の解の和で表される．それぞれの一般解は 46.17(1) によつて

$$(C_0+C_1x)e^{3x},\quad Be^{-x}\quad (C_0,\,C_1,\,B\ \text{は定数}),$$

であるから，求める一般解は

$$(C_0+C_1x)e^{3x}+Be^{-x}\quad (C_0,\,C_1,\,B\ \text{は定数})$$

である．

命題 46.19 定数 $a\neq 0$ について

$$\frac{1}{D^2+a^2}\,q(x)=\frac{1}{a}\Big(\sin ax\int q(x)\cos ax\,dx-\cos ax\int q(x)\sin ax\,dx\Big).$$

証明 右辺の括弧内の第 1 項に (D^2+a^2) を作用させると

$$\begin{aligned}
&(D^2+a^2)\Big(\sin ax\int q(x)\cos ax\,dx\Big)\\
&\qquad=\Big(-a^2\sin ax\int q(x)\cos ax\,dx+2a\,\cos ax\cdot q(x)\cos ax\\
&\qquad\qquad+\sin ax\big(Dq(x)\cdot\cos ax-a\,q(x)\sin ax\big)\Big)\\
&\qquad\qquad+a^2\sin ax\int q(x)\cos ax\,dx\\
&\qquad=2a\cos^2 ax\,q(x)-a\sin^2 ax\,q(x)+a\sin ax\cos ax Dq(x).
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
&(D^2+a^2)\Big(\cos ax\int q(x)\sin ax\,dx\Big)\\
&\qquad=\Big(-a^2\cos ax\int q(x)\sin ax\,dx-2a\,\sin ax\cdot q(x)\sin ax\\
&\qquad\qquad+\cos ax\big(Dq(x)\cdot\sin ax+\,q(x)\cos ax\big)\Big)\\
&\qquad\qquad+a^2\sin ax\int q(x)\cos ax\,dx\\
&\qquad=-2a\sin^2 ax\,q(x)+a\cos^2 ax\,q(x)+a\sin ax\cos ax Dq(x).
\end{aligned}$$

この差を計算すれば

$$(D^2+a^2)\Big(\sin ax\int q(x)\cos ax\,dx-\cos ax\int q(x)\sin ax\,dx\Big)=a\,q(x)$$

がわかる． □

注意 46.20 46.19 から，微分方程式 $(D^2+a^2)y=q(x)$ の一般解は

$$y(x)=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{a}\Big(\sin ax\int q(x)\cos ax\,dx-\cos ax\int q(x)\sin ax\,dx\Big)$$

で与へられる．但し，$C_1,\,C_2$ は定数である．

46.15, 46.19, 46.7 を使へば, 任意の多項式 $F(D)$ と函数 $q(x)$ について, 原理的には $F(D)^{-1}\,q(x)$ を積分で求めることができる.

例題 46.21 函数 $q(x)$ に対し, $(D^2-4D+5)^{-1}\,q(x)$ を一つ求めよ.

解答 $t^2-4t+5=0$ の判別式が負であることに注意して,

$$\begin{aligned}(D^2-4D+5)^{-1}\,q(x) &= \big((D-2)^2+1\big)^{-1}\,q(x)\\ &= \big(D^2+1\big)^{-1}\,e^{-2x}q(x) \quad (\because\ 46.7)\\ &= \sin x\int q(x)\,e^{-2x}\cos x\,dx - \cos x\int q(x)\,e^{-2x}\sin x\,dx \quad (\because\ 46.19)\end{aligned}$$

となる. □

下に述べる例題 46.22, 46.25 の結果も併用すると実践での計算がし易くなるであらう.

例題 46.22 a を定数, $F(t)$ を $F(a)\neq 0$ なる多項式とすると

$$\frac{1}{F(D)}\,e^{ax} = \frac{1}{F(a)}\,e^{ax}.$$

証明 整数 m について $D^m e^{ax} = a^m e^{ax}$ であるから, $F(D)e^{ax} = F(a)e^{ax}$ である. 一方 $F(a)$ は定数であるから $F(a)F(D) = F(D)F(a)$ なので, 所望の式を得る. □

例 46.23 $\dfrac{1}{D^2+2D+3}\,e^{2x} = \dfrac{1}{11}\,e^{2x}$ である.

例題 46.24 $\dfrac{1}{(D-3)^2(D+1)}e^{3x}$ を（一つ）求めよ.

解答 次の様に計算すればよい:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(D-3)^2(D+1)}\,e^{3x} &= \frac{1}{(D-3)^2}\,\frac{1}{D+1}\,e^{3x} = \frac{1}{(D-3)^2}\,\frac{1}{4}\,e^{3x} \quad (\because\ (46.22))\\ &= e^{3x}\frac{1}{D^2}\,\frac{1}{4}\,e^{-3x}e^{3x} \quad (\because\ (46.7))\\ &= \frac{1}{4}e^{3x}\frac{1}{D^2}\,1 = \frac{1}{8}x^2e^{3x}\end{aligned}$$

を得る. □

例題 46.25 a が定数で $q(x)$ が n 次多項式のとき

$$\frac{1}{1-aD}\,q(x) = (1+aD+a^2D^2+\cdots+a^nD^n)\,q(x)$$

となることを示せ.

解答 左辺に $1-aD$ を作用させると

$$\begin{aligned}&(1-aD)(1+aD+a^2D^2+\cdots+a^nD^n)\,q(x) = (1-a^{n+1}D^{n+1})\,q(x)\\ &\quad = q(x) - a^{n+1}D^{n+1}\,q(x) = q(x)-0 \quad (\because\ q(x)\ \text{は}\ n\ \text{次多項式だから})\\ &\quad = q(x)\end{aligned}$$

となる. これから所望の式が得られる. □

例題 46.26 変数 x の未知函数 y についての次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$(D-3)^2(D+1)y = e^{3x}.$$

解答 45.5 から, 求める一般解は 46.18 の一般解と 46.24 の解の和として得られ,

$$\tfrac{1}{8}x^2e^{3x} + (C_0 + C_1x)e^{3x} + Be^{-x} \quad (C_0,\ C_1,\ B \text{ は定数})$$

である. □

演 習 問 題

46.27 次の微分方程式を解け.

(1) $(D^2 - 5D + 6)y = 0$.

(2) $(D^2 + 2D + 3)(D - 2)y = 0$.

(3) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$.

46.28 次の函数を（一つ）求めよ.

(1) $\dfrac{1}{D(D-1)}\, e^{-x}$.

(2) $\dfrac{1}{D(D-1)}\, x^2$.

(3) $\dfrac{1}{D(D-1)}\, \sin x$.

(4) $\dfrac{1}{D^2+4}\, x^2$.

46.29 次の微分方程式の一般解を求めよ. （[2] p.170, 3 より）

(1) $y'' + 3y' = e^{3x} + x$.

(2) $y'' + y' - 6y = \cos x$.

(3) $y'' - 2y' - 3y = e^{-x} + x$.

46.30 次の微分方程式を与へられた初期条件のもとで解け. （[2] p.170, 4 より）

(1) $y'' + y' - 6y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

(2) $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

(3) $y'' - y' - 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

§ 47.　Laplace 変換による解法

ここでは, Laplace 変換について説明する. これも §46 と同様に, 線形微分方程式を代数的な方程式に置き換へて計算する方法である. 読者は §46 の方法との関係を考察してみるとよい.

定義 47.1　区間 $[0,\infty)$ で定義された連続函数 $f(x)$ に対し

$$\mathscr{L}f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

が存在するとき, $s\mapsto\mathscr{L}f(s)$ を $f(x)$ の Laplace 変換と呼ぶ. もちろん $\mathscr{L}f(s)$ の定義域は $f(x)$ に依存する.

補題 47.2　次の (1) 〜 (6) が成り立つ.

(1) $\mathscr{L}f$, $\mathscr{L}g$ が存在するとき, $\mathscr{L}(f+g)$ も存在して

$$\mathscr{L}(f+g)=\mathscr{L}f+\mathscr{L}g.$$

(2) 定数函数 $\mathbf{1}(x)=1$ について

$$\mathscr{L}\mathbf{1}(s)=\frac{1}{s}.$$

(3) 函数 $\boldsymbol{I}(x)=x$ について

$$\mathscr{L}\boldsymbol{I}(s)=\frac{1}{s^2}.$$

(4) 函数 $\boldsymbol{E}_a(x)=e^{ax}$ について

$$\mathscr{L}\boldsymbol{E}_a(s)=\frac{1}{s-a}.$$

(5) もし $f(x)$ と $s>M$ について $\mathscr{L}f$ が存在すれば, $(\boldsymbol{E}_af)(x)=e^{ax}f(x)$ について $s>a+M$ ならば, $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}_af)(s)$ が存在して

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{E}_af)(s)=\mathscr{L}f(s-a).$$

(6) 定数 M, c が存在して $f(x)<Me^{cx}$ であれば $s>c$ に対して

$$\mathscr{L}(f')(s)=s\mathscr{L}f(s)-f(0).$$

さらに $j=0,\cdots,n-1$ について $f^{(j)}(x)<Me^{cx}$ であれば, $s>c$ に対して

$$\mathscr{L}(f^{(n)})(s)=s^n\mathscr{L}f(s)-s^{n-1}f^{(n-1)}(0)-\cdots-sf(0)-f'(0).$$

証明　(1) 定積分の線形性 31.1(1) と広義積分の定義から直ちに導かれる.
(2) については,

$$\mathscr{L}\mathbf{1}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dx=\Big[-\frac{1}{s}e^{-sx}\Big]_0^\infty=\frac{1}{s}.$$

(3) については部分積分により

$$\mathscr{L}\boldsymbol{I}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}xdx=\Big[-\frac{1}{s}e^{-sx}x\Big]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}xdx=0+\frac{1}{s}\mathscr{L}\mathbf{1}(s)=\frac{1}{s^2}.$$

(4) については,

$$\mathscr{L}\boldsymbol{E}_a(s) = \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}dx = \Big[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)x} \Big]_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

(5) については,

$$\mathscr{L}\boldsymbol{E}_a f(s) = \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)dx = \mathscr{L}f(s-a).$$

定義域についてはこれより直ちにわかる.
(6) の最初の主張については, 部分積分により

$$\mathscr{L}f'(s) = \Big[e^{-sx}f(x) \Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx = 0 - f(0) + s\mathscr{L}f(s)$$

となつて第 1 式が示された. ここで, 第 1 項の 0 を得るために, 仮定 $|f(x)| < M\,e^{cx}$ を用ゐて, $s > c$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \big| e^{-sx}f(x) \big| &\leqq M \lim_{x\to\infty} \big| e^{-sx}e^{cx} \big| \\ &\leqq M \lim_{x\to\infty} \big| e^{-sx}e^{cx} \big| = 0 \end{aligned}$$

となることを使つた. さらに

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f'')(s) &= s\mathscr{L}f'(s) - f'(0) = s(s\mathscr{L}f(s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2\mathscr{L}f(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

一般の $\mathscr{L}f^{(n)}(s)$ の式は数学的帰納法で容易に示される. □

例題 47.3 次の微分方程式を解け:

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

解答 $\mathscr{L}y(s) = Y(s)$ と書くと

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}y'' - 5\mathscr{L}y' + 6\mathscr{L}y = 0. \\ \therefore\ & \big(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\big) - 5\big(sY(s) - y(0)\big) + 6Y(s) = 0. \\ \therefore\ & \big(s^2 - 5s + 6)Y(s) - (s-5)y(0) - y'(0) = 0. \\ \therefore\ & \big(s^2 - 5s + 6)Y(s) = s - 4. \\ \therefore\ & Y(s) = \frac{s-4}{(s-2)(s-3)}. \\ \therefore\ & Y(s) = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-3}. \\ \therefore\ & Y(s) = \mathscr{L}(2e^{2x} - e^{3x}). \end{aligned}$$

ゆゑに, 函数

$$y = 2e^{2x} - e^{3x}$$

が求める解である. □

例題 47.4 次の微分方程式を解け:

$$y'' - 5y' + 6y = e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

解答 $\mathscr{L}y(s) = Y(s)$ と書くと

$$\mathscr{L}y'' - 5\mathscr{L}y' + 6\mathscr{L}y = \frac{1}{s-1}.$$

$$\therefore\ \big(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\big) - 5\big(sY(s) - y(0)\big) + 6Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

$$\therefore\ (s^2 - 5s + 6)Y(s) - (s-5)y(0) - y'(0) = \frac{1}{s-1}.$$

$$\therefore\ (s^2 - 5s + 6)Y(s) = \frac{1}{s-1} + s - 4.$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)}\Big(\frac{1}{s-1} + s - 4\Big).$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{2(s-3)} + \frac{1}{2(s-1)}.$$

$$\therefore\ Y(s) = \mathscr{L}(e^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{3x} + \tfrac{1}{2}e^x).$$

ゆゑに, 函数

$$y = e^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{3x} + \tfrac{1}{2}e^x$$

が求める解である. (実際, 元の方程式に代入して, 解の一つであることが確かめよ.) □

注意 47.5 ここで, Laplace 変換を使つた(線形微分方程式の)解法と §46 の微分演算子による解法と比較してみる. 与へられた方程式を $F(D)y = q(x)$ とする.
① 記号解法では, $\frac{1}{F(D)}\,0$ を求める作業 (斉次方程式の解法), および, $\frac{1}{F(D)}\,q(x)$ を求める作業に分けられて, それらの解の和が一般解になる.
② 一方, Laplace 変換を用ゐた場合は, 与へられた方程式 $F(D)y = q(x)$ の両辺を Laplace 変換することで

$$F(s)\mathscr{L}y = \mathscr{L}q + \text{“初期条件から来る項”}$$

なる式が得られて, $\mathscr{L}y = \frac{1}{F(s)}(\mathscr{L}q(s) + ...)$ なる $\mathscr{L}y$ の s の函数としての具体的な式(初期条件も入れたもの)が求まる. 最後に $\mathscr{L}y$ を Laplace 変換の「一覧から探して」(一気に) 解が求まる.

注意 47.6 非斉次形の線形微分方程式の一般解について.
十分多くの函数について, それらの Laplace 変換がわかつてゐるとすると, 原理的には非斉次形の微分方程式の一般解も求めることができる. また, Laplace 逆変換なるものを使つた, より洗練された理論が存在する.

Laplace 逆変換については, 微分積分学の範囲を逸脱するので, 本書では詳しい説明はしないが, 例へば次のことが知られてゐる.

定理 47.7 $f(x)$, $g(x)$ は区間 $[0, \infty)$ で定義された函数で, ある実数 b について

$$\sup\{\, f(x)e^{-bx} \,|\, x \geqq 0\,\}, \quad \sup\{\, g(x)e^{-bx} \,|\, x \geqq 0\,\} \tag{47.8}$$

が有限であるとする. このとき, すべての $x > 0$ について $f(x) = g(x)$ が成り立つためには, ある $c > 0$ について, すべての $s > c$ について

$$\mathscr{L}f(s) = \mathscr{L}g(s)$$

が成り立つことが必要十分である.

注意 47.9 Laplace 変換は便利な計算法であるが, 得られた函数の理論的な定義域が, その函数が本来もつ定義域とならずに, ある右半直線上に限定されてしまふことに注意されたい. これは, 与へられた微分方程式を調べるのに, そもそも Laplace 変換が時間的な経過（未来）を調べるものであることに起因する. しかし, これは元の変数 x を $-x$ で置き換へることにより, 左半直線上を定義域に持つ函数が解として得られて, 最初の函数と自然に繋がることから, 目的は達成される. この方法はあたかも時間を反転させて, 過去を覗くことに対応する [48].

注意 47.10 非斉次な線形微分方程式については, 特殊解を一つ求める計算が最も手間が掛かるのであるが, ここまで述べてきた記号解法や Laplace 変換を利用する解法の他にも, 特殊解を求める方法は知られてゐる. 例へば Wronski（ロンスキー）行列式なるものを利用する方法がある（例へば [3], pp.71-72, 2° を見よ）. 興味ある読者は, 調べてみるとよい.

[48] 以上は柴田将敬氏から教はつた

演 習 問 題

47.11 次の函数の Laplace 変換を求めよ．但し a, b は定数である．〔≒p.169, 2.14[1]〕

(1) $2x+3$.

(2) x^2+ax+b.

(3) $\sin(ax)$.

(4) $\cos(ax+b)$.

(5) e^{ax+b}.

47.12 次の微分方程式を Laplace 変換を使つて解け．（[2] p.170, 3 より）

(1) $y''+3y'=e^{3x}+x$.

(2) $y''+y'-6y=\cos x$.

(3) $y''-2y'-3y=e^{-x}+x$.

47.13 次の微分方程式を与へられた初期条件のもとで Laplace 変換を使つて解け．（[2] p.170, 4 より）

(1) $y''+y'-6y=e^{3x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$.

(2) $y''-2y'-3y=e^{-x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$.

(3) $y''-y'-2y=x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$.

索　引

あ

か

さ

た

な

は