微分積分 1 — Leibniz(ライプニッツ) の公式

(β 版, July 7, 2017, by Y. Ô.)

この note では, 高次の導函数を計算するときに便利な Leibniz の公式を説明する.

定理 (Leibniz の公式) $u = f(x)$, $v = g(x)$ が n 回微分可能ならば, 積 uv の n 次導函数は

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{n-r} v^{r}$$

で与へられる. ここで

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = {}_n\mathrm{C}_r$$

は 2 項係数である.

注意. $n = 0$, $n = 1$ の場合は自明である. $n = 2$ のときは

$$(uv)' = u'v + uv'$$

となり, これは所謂, 積の微分の公式である.

$$\begin{aligned}
(uv)'' &= (u'v + uv')' \\
&= u''v + u'v' && \text{(左側の微分)} \\
&\quad\; + u'v' + uv''' && \text{(右側の微分)} \\
&= u''v + 2u'v' + uv''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(uv)''' &= (u''v + 2u'v' + uv'')' \\
&= u'''v + 2u''v' + \ u'v'' && \text{(左側の微分)} \\
&\quad\; + u''v' + 2u'v'' + uv''' && \text{(右側の微分)} \\
&= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(uv)^{(4)} &= (u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''')' \\
&= u^{(4)}v + 3u'''v' + 3u'v''' && \text{(左側の微分)} \\
&\quad\; + u''v'' + 2u'v''' + uv^{(4)} && \text{(右側の微分)} \\
&= u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}
\end{aligned}$$

これを繰り返へせばよい.

きちんとした証明は数学的帰納法による.

証明. 数学的帰納法により証明. $n \leqq 4$ までは正しい. 一般の n について

$$\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)} &= \Bigl(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)}\Bigr)' \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} && \text{(左側の微分)} \\
&\qquad + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r+1)} && \text{(右側の微分)} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} \\
&\qquad\quad + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-(r+1))} v^{(r+1)} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + \sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} \\
&= \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)}
\end{aligned}$$

よつて $n+1$ についても正しい. □

練習問題 次の関数の n 次導函数を求めよ. ただし $n \geq 2$.

(1) $y = x \log x$

(2) $y = x \sin x$

(3) $y = x^2 e^{3x}$

(4) $y = x^2 \cos x$

解答

(1) $(-1)^n \dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$

(2) $x \sin(x + \frac{n\pi}{2}) - n \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

(3) $3^{n-2} e^{3x} \{9x^2 + 6nx + n(n-1)\}$

(4) $\{x^2 - n(n-1)\} \cos(x + \frac{n\pi}{2}) + 2nx \sin(x + \frac{n\pi}{2})$