

微分積分 1 — 2 変数関数の極大と極小 —

(修正 August 29, 2020, by Y. Ô.)

この note では, 2 変数関数についての極大や極小を調べる方法¹を説明する.

補題 1. 定数 A, B, C が与へられたとし, $D = B^2 - AC$ とおく. 実数の組 $(h, k) \neq (0, 0)$ について

$$G(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

を考へる. このとき, 次が成り立つ.

(1a) $D < 0, A > 0$ のとき, G は h, k の値によらず正である.

(1b) $D < 0, A < 0$ のとき, G は h, k の値によらず負である.

(2) $D > 0$ のとき, G は h, k の値により正にも負にもなり得る.

証明 (1a) のとき

$$G(h, k) = A\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}k^2 > 0$$

である. (1b) も同様.

(2) $D < 0$ より A, B, C のいずれかは 0 でない. $A \neq 0$ のとき, 上記の第 1 項と第 2 項の符号が異なるので (h, k) の値により G は正にも負にもなり得る. 他の場合も容易に確かめられる. \square

定理 2. 領域 U で定義された関数 $z = f(x, y)$ が, すべての 2 階偏導関数を持ち, それらが連続であるとする. 点 $(a, b) \in U$ において $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ とせよ. また $D = f_{xy}(a, b)^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)$ とおく. このとき

(1a) $D < 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ のとき f は (a, b) で極小となる.

(1b) $D < 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ のとき f は (a, b) で極大となる.

(2) $D > 0$ のとき f は (a, b) で極大でも極小でもない.

証明 $A = f_{xx}(a, b), B = f_{xy}(a, b), C = f_{yy}(a, b)$ とおく. Taylor の定理から, 小さな h, k について

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(A'h^2 + 2Bh'k' + C'k^2)$$

と書ける. 但し

$$A' = f_{xx}(a + \theta h, b + \theta k), \quad B' = f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k), \quad C' = f_{yy}(a + \theta h, b + \theta k)$$

で $0 < \theta < 1$ である. このとき, 2 階導関数がどれも連続であることから, $|h|$ と $|k|$ が十分小さければ, $D' := B'^2 - A'C'$ と A' の符号は D と A の符号に一致する. 以下, 定理の場合分けに沿つて証明する.

(1a) この場合, $|h|$ と $|k|$ が十分小さいければ, $D' < 0, A' > 0$ なので, 補題 1 より $f(a+h, b+k)$ は $(h, k) = (0, 0)$ で極小となる. 即ち $f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で極小となる.

(1b), (2) も同様に証明される. \square

注意 3. $D = 0$ のときは, 色々の場合があり Taylor の定理で 3 次以上の項を調べないと判定できない.

¹教科書 p.86, l.8~ p.87, l.2

例 4. $c > 0$ を定数とする. $z = f(x, y) = x^3 - 3cxy + y^3$ の極値を調べよ.

解

$$z_x = 3(x^2 - cy), \quad z_y = 3(y^2 - cx)$$

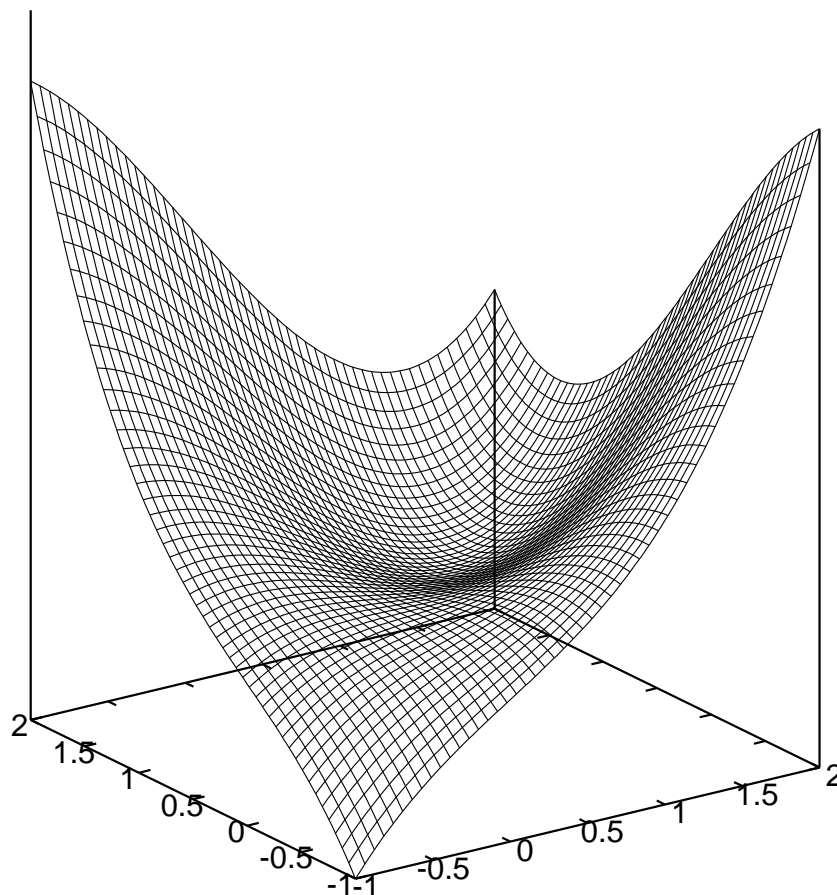
$z_x = z_y = 0$ を解くと $(x, y) = (0, 0), (c, c)$.

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = -3c, \quad z_{yy} = 6y$$

より $D(x, y) = 9(c^2 - 4xy)$.

(i) $(x, y) = (0, 0)$ のとき $D = 9c^2 > 0$, $A = f_{xx}(0, 0) = 6c > 0$ より, 極値を取らない.

(ii) $(x, y) = (c, c)$ のとき $D = -27c^2 < 0$, $A = f_{xx}(0, 0) = 6c > 0$ より, 極小となる. 極小値は $-c^3$.



注意 5. ほとんどの教科書では D の代わりに

$$H = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix}_{(x,y)=(a,b)} = AC - B^2$$

を D としてゐる (Hesse 行列式と呼ばれる) ので注意されたい.