微分積分 1 — 2 変数関数の Taylor の定理 —

(β 版, July 17, 2017, by Y. Ô.)

この note では, 2 変数関数についての Taylor の定理[1] を説明する.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(a+ht,b+kt) &= hf_x(a+ht,b+kt)+kf_y(a+ht,b+kt)\\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+ht,b+kt)\end{aligned}$$

つまり $\frac{d}{dt}$ と $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)$ は同じ効果をもたらす. それゆゑ

$$\frac{d^j}{dt^j}f(a+ht,b+kt)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a+ht,b+kt). \tag{0.1}$$

ここで, $j=1$ は上の通りで $j=2,\,3$ 等について,

$$\begin{aligned}&\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)\\ &\qquad = h^2f_{xx}(x,y)+2hkf_{xy}(x,y)+k^2f_{yy}(x,y),\\ &\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y)\\ &\qquad = h^3f_{xxx}(x,y)+3h^2kf_{xxy}(x,y)+3hk^2f_{xyy}(x,y)+k^3f_{yyy}(x,y)\end{aligned}$$

などとなることは, 容易に確かめられる.

定理 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ を定義域とする関数 $z=f(x,y)$ は n 次までのすべての (高次) 偏導関数を持ち, それらが連続であるとせよ. また, 点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれるとせよ. このとき

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k),$$

$$0<\theta<1$$

となる θ が存在する.

証明. $g(t)=f(a+ht,b+kt)$ に対して $t=0$ における Taylor の定理を区間 $[0,\,t]$ に関して用いると

$$g(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\,g^{(j)}(0)\,t^j+\frac{1}{n!}\,g^{(n)}(\theta t)\,t^n,$$

$$0<\theta<1$$

となる θ が存在する. この式を (0.1) を使つて書き直したのち, $t=1$ とすれば所望の等式を得る. □

この定理を使ふと関数 $f(x,y)$ の極値を求めることができる (別紙).

[1] 教科書 p.85, $\ell.-1$〜 p.86, $\ell.1$