

微分積分 2 — $dxdy$ から $rdrd\theta$ へ

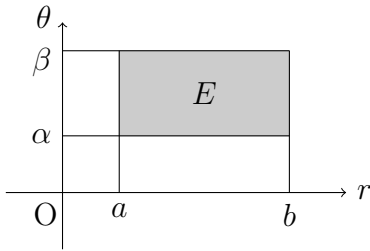
(β 版, January 7, 2016, by Y. Ô.)

この note では、直交座標を極座標に変換した場合の重積分の公式を説明する。

$0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, $0 < a < b$ を定数とし、

$$E = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, a \leq r \leq b\}$$

とする。



また

$$D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid (r, \theta) \in E\}$$

とおく。重積分

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

を計算したい。

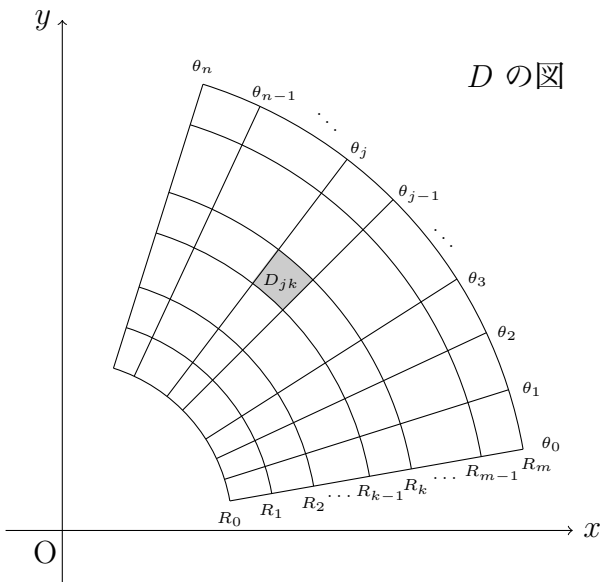
自然数 n に対し、 α から β の間を n 等分し

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

とする。即ち $\theta_j = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} j$ ($j = 0, \dots, n$)。さらに、別の自然数 m を取り a から b の間を m 等分する:

$$a = R_0 < R_1 < \dots < R_{m-1} < R_m = b,$$

$$R_k = a + \frac{b-a}{m} k \quad (k = 0, \dots, m).$$



また、

$$D_{jk} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j, R_{k-1} \leq r \leq R_k\}$$

とおき、 $r_k = \frac{R_{k-1} + R_k}{2}$ と記すとき、 D_{jk} の面積 $\mu(D_{jk})$ は (扇型の面積の公式を使つて)

$$\begin{aligned} \mu(D_{jk}) &= \frac{1}{2} R_k^2 \frac{\beta - \alpha}{n} - \frac{1}{2} R_{k-1}^2 \frac{\beta - \alpha}{n} \\ &= \frac{1}{2} (R_k + R_{k-1}) (R_k - R_{k-1}) \frac{\beta - \alpha}{n} \\ &= r_k (R_k - R_{k-1}) \frac{\beta - \alpha}{n} \\ &= r_k \frac{b-a}{m} \frac{\beta - \alpha}{n} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(r_k \cos \theta_j, r_k \sin \theta_j) \mu(D_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \underline{f(r_k \cos \theta_j, r_k \sin \theta_j) r_k \frac{b-a}{m}} \right) \frac{\beta - \alpha}{n} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、点 $(r_k \cos \theta_j, r_k \sin \theta_j)$ が小矩形 D_{jk} 内の点であることから、左辺 で、 $m \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$ としたときの極限は重積分

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

の定義に他ならない。一方、各 r_k が小区間 $[R_{k-1}, R_k]$ 内にあることから、下線部 を r の関数 $f(r \cos \theta_j, r \sin \theta_j) r$ の r に r_k を代入したものと考へて、1 変数のときの区分求積法を使ふと、右辺 において $m \rightarrow \infty$ としたものは

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_a^b f(r \cos \theta_j, r \sin \theta_j) r dr \right) \frac{\beta - \alpha}{n}$$

に収束する。さらに $n \rightarrow \infty$ とすると、再び区分求積法から

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta \\ &= \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

に収束する。以上から

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

が了解される。