## Landau の記号 $o$ について

> Taylor の定理 や Taylor 展開 (冪級数展開) には 3 つの意味がある.
> **1**. 有限個の項で打ち切つたもの (つまり多項式) と剰余項の和が元の関数に等しいこと.
> (p.59. 定理 1.27, p.130, 定理 2.7)
> **2**. 冪級数展開において, その収束域の $x$ に対しての等式として. (p.64, 系 1.2 など).
> **3**. $|x-a|$ が小さいとき, 有限個の項で打ち切つたものと, 元の関数が近いことを示す. (Landau の $o$).

ここでは **3** について述べる. そのために Laudau の記号 $o(\ )$ といふものを説明する.
以下は **三宅敏恒著：『入門微分積分』**に基づく.
関数の局所的な評価を知りたいことは多い. それを表すために, $x=a$ の近くで定義された 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

のとき

$$f(x)=o(g(x))\quad(x\to a) \tag{15.1}$$

と書く. この記号を **Landau の記号**といふ ($o$ はスモールオーと読む). 特に

$$f(x)=o(1)\quad(x\to a)$$

は $\lim_{x\to a}f(x)=0$ を意味する. 定義からわかる様に (15.1) は, $a$ の近くでは $f(x)$ の方が $g(x)$ よりはるかに小さいことを意味する.

以下は, 特に重要な $a=0$, $g(x)=x^n$ の場合に限つて説明する.

**例 15.2.** $\cos x-1=o(x)$ $(x\to 0)$ である. 実際 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$.

**例 15.3.** $\sin x-x=o(x^2)$ $(x\to 0)$ である. 実際 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=0$.

$f(x)=o(x^m)$ $(x\to 0)$ を満たす関数 $f(x)$ に対して $f(x)$ の具体的な形は必要ないが, $x\to 0$ のときの評価が必要なとき, $f(x)$ の代りに $o(x^m)$ を用いると便利である.

**例 15.4.** $f(x)=2x^2+o(x^2)$ $(x\to 0)$ とは

$$f(x)=2x^2+h(x),\quad \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^2}=0$$

を意味する.

**例 15.5.** $\cos x=1+o(x)$ $(x\to 0)$ である. 例 15.2 の変形である.

**例 15.6.** $\sin x=x+o(x^2)$ $(x\to 0)$ である. 例 15.3 の変形である.

**注意 15.7.** Landau の記号を含む等式は, 左辺で右辺を評価する評価式 であつて, 普通の意味の等式ではないことに注意しなければならない.

**例 15.8.** $x\to 0$ のとき, $o(x^2)=o(x)$ ではあるが $o(x)=o(x^2)$ ではない.

**注意 15.9.** $x\to 0$ のとき, $o(x^m)-o(x^m)=o(x^m)$ ではあるが $o(x^m)-o(x^m)=0$ といふ計算は正しくない. 実際, この左辺は評価式にすぎないので, それで評価される関数が常に 0 といふ決まつた関数になるとは限らないからである.

Landau の記号は, 慣れると非常に便利である.

> **定理 15.10.** $x \to 0$ のとき, 次の (1), (2), (3) が成り立つ.
> (1) $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$ (2) $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$
> (3) $m \leqq n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$.

**証明** たとへば (3) は

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^m) + o(x^n)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{o(x^m)}{x^m} + x^{n-m} \frac{o(x^n)}{x^n} \right\} = 0.$$

他も同様である. □

**例 15.11.** (1)

$$\begin{aligned} x\{1 + x + o(x)\} - \{1 - 2x + o(x)\} &= x + x^2 + xo(x) - 1 + 2x + o(x) \\ &= -1 + 3x + x^2 + o(x^2) + o(x) \\ &= -1 + 3x + o(x) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &\{1 + 2x - x^2 + o(x^2)\}\{2 + x + o(x^2)\} \\ &= 2 + 5x - x^3 + (2 + x)o(x^2) + (1 + 2x - x^2)o(x^2) + o(x^2)o(x^2) \\ &= 2 + 5x - x^3 + o(x^2) + o(x^2) + o(x^4) \\ &= 2 + 5x + o(x^2) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

## 漸近展開

Taylor の定理の剰余項が $x \to 0$ のときに <u>評価できれば</u>, 代りに Landau の記号を用いると便利である.

**定理 15.12.** $f(x)$ が 0 を含むある開区間で, $n$ 回まで微分可能であり, $f^{(n)}(x)$ が連続であれば

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

これを Landau の $o$ を用いた <u>$n$ 次の漸近展開</u> と呼ぶ.

**証明** Taylor の定理により $0 < \theta < 1$ なる $\theta$ が存在して,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

よつて

$$\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}x^n = o(x^n)$$

が示されればよい. ところが $f^{(n)}(x)$ は $x = 0$ で連続であるから

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}x^n}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

となり成り立つ. □

**例 15.13.** $o(x^2)$ で評価した式を挙げる.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \sin x = x + o(x^3)$$

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 + x + o(x^2).$$

Landau の記号に使ひ慣れると, 次の例の様に, 極限の計算を L'Hôspital（ロピタル）の定理を使つた場合よりもわかり易くできる.

**例 15.14.**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(x+o(x^2))}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\Big) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

**注意 15.15.** $x=0$ 以外の点 $x=a$ での漸近展開を調べたければ, 調べた関数 $f(x)$ に対して, $g(x)=f(x+a)$ とおいて $g(x)$ の $x=0$ での漸近展開を調べれば良い.

**命題 15.16.** $n \geqq m$ ならば $o(x^m+o(x^n)) = o(x^m)$.

**証明** 実際,

$$
\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m+o(x^n))}{x^m+o(x^n)}\frac{x^m+o(x^n)}{x^m} = 0\cdot(1+0) = 0
$$

となる. □

**例 15.17.** 例へば $\dfrac{1}{1-X} = 1+X+X^2+\dfrac{X^3}{1-X} = 1+X+X^2+o(X^2)$ を使へば

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2+o(x^2)} &= 1+(x^2+o(x^2))+(x^2+o(x^2))^2+o\big((x^2+o(x^2))^2\big)\\
&= 1+x^2+o(x^2)+(x^4+2x^2o(x^2)+o(x^4))+o(x^2+2x^2o(x^2)+o(x^4))\\
&= 1+x^2+o(x^2)+o(x^3)+o(x^2)\\
&= 1+x^2+o(x^2)
\end{aligned}
$$

がわかる. この様にして $x\to 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sin x} &= \frac{x}{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}\\
&= \frac{x}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}\\
&= \frac{x}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}\\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}\\
&= 1+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2+o\big((\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2\big)\\
&= 1+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))+o\big((\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2\big)\\
&= 1+\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2)
\end{aligned}
$$

を得る. これが教科書 p.67 の問題 1.11 [A] 2 や p.134 の問題 2.8 [A] 1 の出題の意図であると思はれる.

**教科書 『北岡 · 深川 · 河村 ： 工科系の微分積分学の基礎』の p.67 (改題)**

**11.1 [A]** (p.67)

**2**. 2 次の関数について $x \to 0$ のとき, Landau の $o$ を用いた $n$ 次の漸近展開を求めよ.

(4) $\dfrac{e^x - 1}{x}$

**解答**

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1}{x} &= \frac{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})}{x} \\ &= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n+1)!} + o(x^n).\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{\sin x}{x}$ (但し, $n$ は奇数で $n = 2m+1$ とせよ)

**解答**

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})}{x} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+1}).\end{aligned}$$

**5**. 次の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

**解答**

$$\begin{aligned}\frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^4)\right)}{x^2} &= \frac{\frac{x^2}{2!} + o(x^3)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + o(x) \longrightarrow \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3)′ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$

**解答**

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\left(x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3 + o(x^4)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} + o(x)}{1 + o(x)} \longrightarrow -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$