重積分の線形写像による変換公式

この note では $a'd' - b'c' \neq 0$ なる定数 a', b', c', d' について, 公式

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \left|a'd' - b'c'\right| \cdot \iint_{D'} f(a'u + b'v, c'u + d'v)\,dudv}$$

を説明することにある. 但し, D は $\mathbb{R}^2$ 内の領域で, 応用上は

$$M_1 \leqq ax + by \leqq M_2, \quad N_1 \leqq cx + dy \leqq N_2$$

なる形であるとしてよい. このとき行列表示で

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

であり,

$$\begin{aligned} D' &= \{\,(u,v) \,|\, M_1 \leqq u \leqq M_2,\ N_1 \leqq v \leqq N_2\,\} \\ &= \{\,(u,v) \,|\, (a'u + b'v, c'u + d'v) \in D\,\} \end{aligned}$$

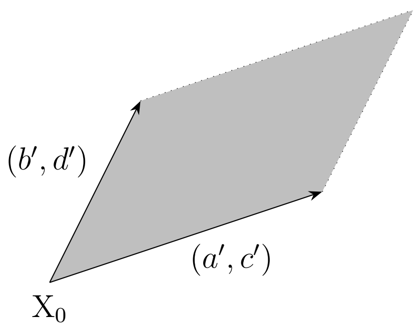
である. いま $\mathrm{X}_0 \in D$ が対応する点が $\mathrm{U}_0 \in D'$ であるとする. このとき,

$\mathrm{U}_0 \in D'$ の座標が $(1,0)$ だけ増えると $\mathrm{X}_0 \in D$ の座標はきつかり (a', c') 増え,

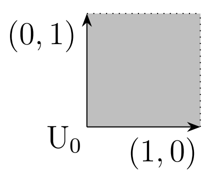
$\mathrm{U}_0 \in D'$ の座標が $(0,1)$ だけ増えると $\mathrm{X}_0 \in D$ の座標はきつかり (b', d') 増える.

また $\left|a'd' - b'c'\right| = 1/|ad - bc|$ であることもわかる.

以上のことを図示すれば, 次の様になる.



D の中の図



D' の中の図

ここで, 左の平行四辺形の面積は $\left|a'd' - b'c'\right|$ であり, 右の正方形の面積は 1 である. このことから, 符号付きの体積

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

は

$$\iint_{D'} f(a'u + b'v, c'u + d'v)\,dudv$$

の $\left|a'd' - b'c'\right|$ 倍であることになり, 所望の公式が証明された.

2017 年 12 月 9 日 Y.Ô.

微分積分 2 — $dxdy$ から $rdrd\theta$ へ

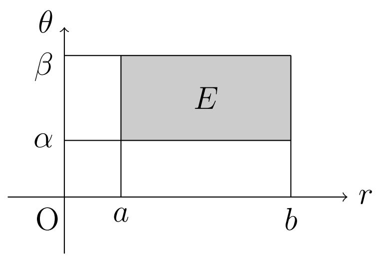
(β 版, January 7, 2016, by Y. Ô.)

この note では, 直交座標を極座標に変換した場合の重積分の公式を説明する.

$0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi$, $0 < a < b$ を定数とし,

$$E = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqq \theta \leqq \beta, \quad a \leqq r \leqq b\}$$

とする.



また

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid (r, \theta) \in E\}$$

とおく. 重積分

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

を計算したい.

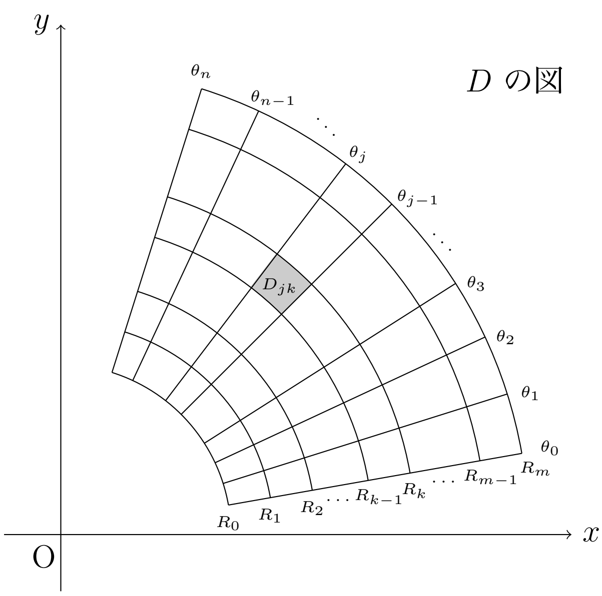
自然数 n に対し, α から β の間を n 等分し

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

とする. 即ち $\theta_j = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n} j$ $(j = 0, \cdots, n)$. さらに, 別の自然数 m を取り a から b の間を m 等分する:

$$a = R_0 < R_1 < \cdots < R_{m-1} < R_m = b,$$

$$R_k = a + \frac{b-a}{m} k \quad (k = 0, \ \cdots, \ m).$$



また,

$$D_{jk} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \theta_{j-1} \leqq \theta \leqq \theta_j, \quad R_{k-1} \leqq r \leqq R_k\}$$

とおき, $r_k = \frac{R_{k-1}+R_k}{2}$ と記すとき, D_{jk} の面積 $\mu(D_{jk})$ は (扇型の面積の公式を使って)

$$\begin{aligned}
\mu(D_{jk}) &= \frac{1}{2}{R_k}^2 \frac{\beta-\alpha}{n} - \frac{1}{2}{R_{k-1}}^2 \frac{\beta-\alpha}{n} \\
&= \frac{1}{2}(R_k + R_{k-1})(R_k - R_{k-1}) \frac{\beta-\alpha}{n} \\
&= r_k (R_k - R_{k-1}) \frac{\beta-\alpha}{n} \\
&= r_k \frac{b-a}{m} \frac{\beta-\alpha}{n}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(r_k\cos\theta_j, r_k\sin\theta_j)\,\mu(D_{jk}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} \underline{f(r_k\cos\theta_j, r_k\sin\theta_j)\, r_k} \frac{b-a}{m}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 点 $(r_k\cos\theta_j, r_k\sin\theta_j)$ が小矩形 D_{jk} 内の点であることから, <u>左辺</u>で, $m \to \infty$ $n \to \infty$ としたときの極限は重積分

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

の定義に他ならない. 一方, 各 r_k が小区間 $[R_{k-1}, R_k]$ 内にあることから, 下線部を r の関数 $f(r\cos\theta_j, r\sin\theta_j)\,r$ の r に r_k を代入したものと考へて, 1 変数のときの区分求積法を使ふと, <u>右辺</u>において $m \to \infty$ としたものは

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b f(r\cos\theta_j, r\sin\theta_j) r\, dr\right)\frac{\beta-\alpha}{n}$$

に収束する. さらに $n \to \infty$ とすると, 再び区分求積法から

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\right) d\theta \\
&= \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta
\end{aligned}$$

に収束する. 以上から

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta}$$

が了解される.