

2022 年度 後期 期末試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	代 数 学 5 <small>月曜 1 時限, 教科書: Original</small> (§§1-9)		A, B	大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学 籍 番 号 (9 桁)		氏 名	
なし	理工学部	数学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。注意 2. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。
注意 3. 学生証、記名用のペン、鉛筆またはシャープペンシル、消しゴム以外は机の上に置かないこと。注意 4. **8** は選択問題である。**8a** **8b** のどちらかを選んで解答せよ。

1 (10 点) p を素数とし、 K は標数 p の体とする。任意の元 $a, b, c \in K$ に対し、次が成り立つことを示せ。

- $(a + b)^p = a^p + b^p$.
- 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ について $(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$.
- $(a + b + c)^p = a^p + b^p + c^p$.

2 (15 点) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ は $\mathbb{F}_5[x]$ の既約多項式である。これの根の 1 つを α とし $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ とせよ。このとき、 K における $\alpha^2 + \alpha + 1$ の逆数を α の \mathbb{F}_5 上の 2 次以下の多項式で表せ。

3 (15 点) 次の体の間の包含関係を Hasse 図で示せ。

$$\mathbb{Q}(\sqrt{6}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}i), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}\sqrt{3}i).$$

さらに、隣接する体間の拡大次数も書き入れよ。

説明も可能な限り記入せよ。但し、 i は虚数単位、 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ で、最後 2 つの括弧内は $\sqrt[3]{2}$ や $\sqrt[6]{2}$ と $\sqrt{3}$ と i の積である。

学籍番号 (9桁)	氏名

4 (10点) 体の拡大 L/K があり, M をその中間体とせよ. $\alpha \in L$ が K 上代数的であるとせよ. このとき $[M(\alpha) : M] \leq [K(\alpha) : K]$ であることを示せ.

5 (10点) 体の拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 があつて

$$[M_1 : K] = m_1, \quad [M_2 : K] = m_2,$$

$$[L : K] = m_1 m_2, \quad \gcd(m_1, m_2) = 1$$

とせよ. このとき $L = M_1 M_2$ であることを示せ.

6 (10点) 次の体の合成体の \mathbb{Q} 上の基底と \mathbb{Q} 上の拡大次数を求めよ.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$

7 (10点) 代数的拡大 L/K とその, 互ひに包含関係がない, 2つの真の部分体 M_1, M_2 で次の様な例を挙げよ. 説明も付けること.

(1) $[M_1 M_2 : M_1] < [M_2 : K]$ かつ $[M_1 M_2 : M_1] = [M_2 : M_1 \cap M_2]$

(2) $[M_1 M_2 : M_1] < [M_2 : M_1 \cap M_2]$.

学籍番号 (9桁)	氏名

8a (10点) 体の同型について, 以下の間に答へよ.

(1) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ の自己同型をすべて求めよ.

(2) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ から \mathbb{C} への中への同型をすべて求めよ.

8b (10点) t を不定元とする.

$$\varphi: \mathbb{F}_3(t) \longrightarrow \mathbb{F}_3(t), \quad \varphi(\alpha) = \alpha^3$$

は中への同型であることを示せ. また, この写像の像の体を記せ.

9 (10点) K を体, α, β を K 上代数的な元とする.

次の間に答へよ.

(1) $\text{irr}(\alpha, K, x) = \text{irr}(\alpha, K(\beta), x) \iff \text{irr}(\beta, K, x) = \text{irr}(\beta, K(\alpha), x)$ を示せ.

(2) α' を α の K 上の共役元, β' を β の K 上の共役元とせよ. $\text{irr}(\alpha, K, x) = \text{irr}(\alpha, K(\beta), x)$ であれば, $\sigma(\alpha) = \alpha', \sigma(\beta) = \beta'$ となる K 上の同型写像 $\sigma: K(\alpha, \beta) \rightarrow K(\alpha', \beta')$ が存在することを示せ.

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

既習事項のまとめ

- (1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を体の拡大 L/K と記す.
- (2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$.
- (3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を代数的拡大と呼ぶ.
- (4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを有限次拡大と呼ぶ.
- (5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の中間体と呼ぶ.
- (6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ線形 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.
- (7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によって, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の単純拡大であるといはれる.
- (8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを素体と呼ぶ. 素体は有理数体 \mathbb{Q} か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.
- (9) 体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の標数といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K の標数を $\text{char } K$ と記す. 前者の場合は素体が \mathbb{F}_p であり, 後者の場合の素体は \mathbb{Q} である.
- (10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) \in K[x]$ が唯一 1 つ存在し, それを α の最小多項式と呼んで $\text{irr}(\alpha, K, x)$ で表す. このとき $K(\alpha)$ と $K[x]/(f(x))$ は体として K 上同型である.
- (11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の合成体と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による持ち上げと呼ぶ.
- (12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は代数的閉体といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の代数的閉包といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に \bar{K} と記す.

以上が「代数学 5」の範囲.

- (13) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の最小分解体といふ.
- (14) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみで分解する, という性質を持つとき, L/K は正規拡大であるといはれる.
- (15) 正規拡大の“底上げ”や持ち上げは正規拡大である. また K 上の 2 つの正規拡大の合成体はまた K 上の正規拡大である.
- (16) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は分離的であるといはれる. 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上分離的であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を分離的拡大と称する.
- (17) 分離的拡大の持ち上げは分離的拡大である. また K 上の 2 つの分離的拡大の合成体はまた K 上の分離的拡大である.
- (18) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は完全体と呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.
- (19) 代数的拡大 L/K について, L から $\bar{K}(\cap L)$ への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す. さらに $[L:K]_s = [L:K]/[L:K]_s$ と記す. $\text{char } K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.
- (20) 分離的拡大は単純拡大である.
- (21) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大と呼ぶ.
- (22) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \text{Gal}(L/K)$ について, $\mathcal{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathcal{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathcal{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^g = \alpha \ (\forall g \in H)\}$, 各 $M \in \mathcal{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \mid \sigma^g = \sigma \ (\forall g \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \text{Gal}(L/M)$ である.
- (23) Galois の基本定理 1
 - (22) の状況下で, $\varphi: H \rightarrow L^H$ は $\mathcal{G}(G)$ から $\mathcal{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与えられる.
- (24) Galois の基本定理 2
 - (22) の状況下で, $M \in \mathcal{F}(L/K)$ について次が成り立つ.
 - (1) $\tau \in \text{Gal}(L/K)$ に対し, $\tau \text{Gal}(L/M)\tau^{-1} = \text{Gal}(L/M^\tau)$.
 - (2) M は K の Galois 拡大 $\iff \text{Gal}(L/M) \triangleleft \text{Gal}(L/K)$.
 - (3) (2) の両側が成り立つとき, $\text{Gal}(M/K) \simeq \text{Gal}(L/K)/\text{Gal}(L/M)$ (群としての同型).
 - (25) Galois 群が巡回群である様な拡大は, 巡回拡大と呼ばれる.
 - (26) Galois 群が Abel 群である様な拡大は, Abel 拡大と呼ばれる.
 - (27) 体 K 上の Abel 拡大の合成体は K 上の Abel 拡大である.
 - (28) 拡大 L/K の部分体 M, M' について M/K と M'/K がともに Galois 拡大であれば, MM'/K も Galois 拡大であつて, $\text{Gal}(MM'/K) \simeq \text{Gal}(M/K) \times \text{Gal}(M'/K)$ が成り立つ. 左辺の σ に対して右辺の $\sigma|_M$ が対応する.