

2022 年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点 1	評点 2
理工学部		

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/2	有	なし	80分	代 数 学 6 <small>金曜 2 時限, 教科書 : Original §10 ~ §15</small>	A, B	大 西 良 博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名	
なし	理工学部	数学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 4. **7A** **7B** は選択問題である。どちらか 1 問選んで解答せよ。

1 (10 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})/\mathbb{Q}$ を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ。

2 (10 点) 拡大次数が 2 である拡大を 2 次拡大 といふ。次の事を示せ。
 (1) 2 次拡大は正規拡大である。
 (2) 体の拡大列 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ において, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ はともに正規拡大であるが, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ は正規拡大ではない。
11.7

3 (15 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}i)/\mathbb{Q}$ は正規拡大であるか否かを理由を付して答へよ。

4 (15点) 次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について, $f(x)$ の最小分解体とその \mathbb{Q} 上の拡大次数を求めよ. 最小分解体はできるだけ簡潔な表示を求めよ.

(1) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 10.$

(2) $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 + x + 1).$

(3) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4.$

学籍番号 (9桁)	氏名

5 (10点) 次の代数的拡大は正規であるか否かを理由を付して答へよ. 但し i は虚数単位, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})/\mathbb{Q}$

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$

学籍番号 (9桁)	氏名

6 (10点) 拡大 L/K の 2 元 α, β は K 上代数的であるとせよ. $f(x) = \text{irr}(\alpha, K, x)$, $g(x) = \text{irr}(\beta, K, x)$ とおく. このとき $f(x)$ が $K(\beta)$ 上で既約であることと $g(x)$ が $K(\alpha)$ 上で既約であることは同値であることを示せ. (Hint : $[K(\alpha, \beta) : K]$ を考へよ.) **10.5**

7A (10点) t を不定元とする. 次の拡大は

(a) 正規拡大であるか否か, また (b) 分離拡大であるか否か, それぞれ理由を付けて答へよ. **11.11**, **12.19**

(1) $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^5)$ (2) $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^4)$ (3) $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^3)$

7B (10点) t は不定元とし,

$$K = \mathbb{F}_3(t^9), \quad f(x) = x^{27} + t^9x^{18} + t^{27} \in K[x]$$

とおく. 体 $L = \mathbb{F}_9(t)$ は $f(x)$ の K 上の最小分解体であることを示せ.

但し, $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$ とする.

また $[L : K]_s, [L : K]_i, [L : K]$ はそれぞれいくつか. **12.25** の類題

学籍番号 (9桁)	氏名

8 (10点) p を素数, $f(x) = x^p - x - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ とする. 15.14

- (1) $f(x) = 0$ の 1 つの根を α とせよ. このとき, $\text{Aut } \mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_p$ は $\alpha \mapsto \alpha + r$ ($r = 0, 1, \dots, p-1$) で尽されることを示せ.
- (2) 多項式 $f(x)$ は \mathbb{F}_p 上既約であること, および $\mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_p$ が Galois 拡大であることを示せ.

9 (10点) $\zeta = \exp(2\pi i/7)$ とおき, $L = \mathbb{Q}(\zeta)$, $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$ とする. 次の問に答へよ. 15.16 を改題

- (1) $\text{irr}(\zeta, \mathbb{Q}, x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ であることを示せ.
- (2) $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}, x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ であることを示せ.
- (3) $[L : \mathbb{Q}(\alpha)]$ および $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ はいくつか.
- (4) $\zeta \mapsto \zeta^3$ は L の \mathbb{Q} 上の自己同型を与へることを示せ. また, それが $\mathbb{Q}(\alpha)$ の自己同型を与へることを示せ.
- (5) 上の $\mathbb{Q}(\alpha)$ の自己同型を σ とおく. α^σ を α の有理式で書け.

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

既習事項のまとめ

- (1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を体の拡大 L/K と記す. このとき L は K 上の vector 空間 である.
- (2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$ である. より詳しく, $\{\beta_j\}$ が L/M の基底で, $\{\alpha_i\}$ が M/K の基底のとき, $\{\alpha_i\beta_j\}$ が L/K の基底をなす.
- (3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を 代数的拡大 と呼ぶ.
- (4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを 有限次拡大 と呼ぶ.
- (5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の 中間体 と呼ぶ.
- (6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.
- (7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の 単純拡大 であるといはれる.
- (8) 2つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを素体と呼ぶ. 素体は有理数体 \mathbb{Q} か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.
- (9) 体 K の積に関する単位元 1 をいづくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の 標数 といはれ, それは素数である. 1 をいづくつか加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\text{char } K$ と記す. 前者の場合は素体が \mathbb{F}_p であり, 後者の場合の素体は \mathbb{Q} である.
- (10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ か唯一つ存在し, それを α の最小多項式 と呼んで $\text{irr}(\alpha, K, x)$ で表す.
- (11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の合成体と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による持ち上げと呼ぶ.
- (12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は代数的閉体といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の代数的閉包といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に \bar{K} と記す.
- (13) 体 K 上代数的な 2 元 α, α' に対して, 次の 2 つの同値は同値であり, これらが成り立つとき, 2 元 α, α' は K 上で 共役 であるといはれる.
 - (1) $\text{irr}(\alpha, K, x) = \text{irr}(\alpha', K, x)$.
 - (2) K 上の同型 $\sigma: K(\alpha) \rightarrow K(\alpha')$ で $\sigma\alpha = \alpha'$ となるものがある.
- (14) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の 最小分裂体 といふ.
- (15) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみの積に分解する, という性質を持つとき, L/K は 正規拡大 であるといはれる. 体 K に, 1 つの多項式 $f(x) \in K[x]$ の根の全てを添加してできる拡大は, 正規拡大 である.
- (16) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は 分離的 であるといはれる. 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上 分離的 であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を 分離的拡大 と称する.
- (17) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は 完全体 であると呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.
- (18) 代数的拡大 L/K について, L から \bar{K} への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す. $\text{char } K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.
- (19) 分離的拡大は単純拡大である.
- (20) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大 と呼ぶ.
- (21) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \text{Gal}(L/K)$ について, $\mathcal{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathcal{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathcal{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^{\sigma} = \alpha \ (\forall \sigma \in H)\}$, 各 $M \in \mathcal{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \mid \sigma^{\alpha} = \alpha \ (\forall \alpha \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \text{Gal}(L/M)$ である.
- (22) Galois の基本定理 1
 - (21) の状況で, $\varphi: H \rightarrow L^H$ は $\mathcal{G}(G)$ から $\mathcal{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与えられる.
- (23) Galois 群が巡回群である様な拡大は, 巡回拡大 と呼ばれる.
- (24) Galois 群が Abel 群である様な拡大は, Abel 拡大 と呼ばれる.
- (25) 体 K 上の Abel 拡大の合成体は K 上の Abel 拡大である.
- (26) 拡大 L/K の部分体 M, M' について M/K と M'/K がともに Galois 拡大であれば, MM'/K も Galois 拡大であつて, $\text{Gal}(MM'/K) \simeq \text{Gal}(M/M' \cap M) \times \text{Gal}(M/M' \cap M)$ が成り立つ. 左辺の σ に対して右辺の $\sigma|_M$ が対応する.