実施：2022 年 7 月 14 日 (木) 10:50-12:20, E-701 室

2022 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

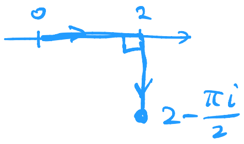
評 点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/2	有	なし	80 分	解析学 3 木曜 2 時限, 教科書：稲野・加藤 著 ＋α	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏 名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証，記名用のペン，鉛筆またはシャープペンシル，消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 試験場の静粛を保つために，退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．
注意 4. $\boxed{4a}$ と $\boxed{4b}$ および $\boxed{9a}$ と $\boxed{9b}$ は選択問題である．どちらか 1 問を選んで解答せよ．

$\boxed{1}$ (10 点) 次の積分の値を 2 通りに求めよ：



$$\int_0^{2-\frac{\pi i}{2}} e^z\,dz.$$

(1) 0 から実軸に沿って 2 に至り，そこから虚軸に平行に $2-\frac{\pi i}{2}$ に至る折れ線に沿っての積分で．

(2) 被積分函数が原始函数を持つことを利用して．

(2)

$$(\text{与式}) = \left[e^z\right]_0^{2-\frac{\pi i}{2}}$$
$$= e^{2-\frac{\pi i}{2}} - 1 = e^2\cdot(-i) - 1$$
$$= -ie^2 - 1$$

$dz = d(x+iy)$
$= dx + i\,dy$

(1)

$$(\text{与式}) = \int_0^2 e^x dx + \int_0^{-\frac{\pi}{2}} e^{2+iy}\, i\,dy$$
$$= \left[e^x\right]_0^2 + ie^2\left[\frac{1}{i}e^{iy}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}$$
$$= (e^2-1) + e^2\left(e^{-\frac{\pi i}{2}} - 1\right)$$
$$= \quad〃 \quad + e^2(-i-1)$$
$$= \quad〃 \quad - ie^2 - e^2$$
$$= -1 - ie^2 \cdots \text{Ans.}$$

$\boxed{2}$ (10 点) C を $\frac{\pi i}{2}$ を中心とした半径 1 の円周（反時計回り）とせよ．次の積分の値を求めよ：

$$\int_C \frac{z\,e^z}{z-\frac{\pi i}{2}}\,dz.$$

Cauchy の積分公式より

$$(\text{与式}) = 2\pi i\; ze^z\Big|_{z=\frac{\pi i}{2}}$$
$$= 2\pi i\cdot\frac{\pi i}{2}\,e^{\frac{\pi i}{2}}$$
$$= -\pi^2\cdot i = -i\pi^2 \cdots \text{Ans.}$$

$\boxed{3}$ (15 点) C は $\frac{\pi}{3}$ を含む領域の（標準の向きの）境界である．次の積分の値を求めよ：

$$\int_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{3})^4}\,dz.$$

Cauchy の導函数積分公式より

$$(\text{与式}) = \frac{2\pi i}{3!}(\sin z)'''\Big|_{z=\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{\pi i}{3}\cdot(-\cos z)\Big|_{z=\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{\pi i}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{\pi i}{6} \cdots \text{Ans.}$$

$\boxed{\text{4a}}$ (10 点) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ について答へよ.

(1) この級数の収束半径を求めよ.
(2) この級数は収束円周上の至るところで絶対収束することを示せ.

$\boxed{\text{4b}}$ (10 点) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ について答へよ.

(1) この級数が $\{z; |z|<1\}$ で絶対収束することを示せ.
(2) この級数は, 円周 $\{z; |z|=1\}$ 上のどの点においても発散することを示せ.

$\boxed{4a}$

(1) $\dfrac{1/n(n+1)}{1/(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+2}{n} \to 1$

であるから d'Alambert の定理より

収束半径は 1

(2) $|z|=1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n(n+1)} z^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \quad \text{より}$$

絶対収束する.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ は高級すぎる.

$\boxed{4b}$

(1) $\dfrac{n}{n+1} \longrightarrow 1$ だから

d'Alambert の定理より $\{z; |z|<1\}$

収束半径は 1 ~~Ans~~ で主張が示された.

(2) $|z|=1$ のとき

$$|nz^n| = n \to \infty \quad \text{より}$$

発散する

$(\because\ \sum a_n$ 収束 $\Rightarrow \lim a_n = 0)$

学籍番号

$\boxed{5}$ (10 点) 函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-3)}$ を 0 を中心に整級数に展開せよ. また, その展開級数の収束半径も求めよ.

$\dfrac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots$

$$f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1/3}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1/2}{1+\frac{z}{2}}\right) \quad \left(\begin{array}{l}|z|<2\\|z|<3\end{array}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n\right\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n \cdots \text{Ans.}$$

収束半径は 2

$(-1)^n$ が抜けてることあり.
d'Alambert で計算ミスしてあった.

$\boxed{6}$ (10 点) 函数 $\dfrac{1}{\cos 2z}$ の 0 を中心とした整級数展開の収束半径を, 整級数に展開しないで求めよ.

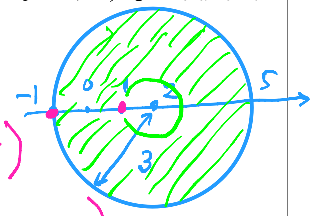
$$\cos 2z = 0 \iff 2z \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$$
$$\iff z \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$$

よって 0 に最も近い特異点は $\dfrac{\pi}{4}$.
ゆえに収束半径は

$\dfrac{\pi}{4}$ … Ans.

学籍番号

7 (10点) 関数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$ の $1<|z-2|<3$ における Laurent 展開を求めよ.



$$f(z)=\frac12\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)$$

$$=\frac12\left(\frac{1}{-1-(z-2)}+\frac{1}{3+z-2}\right)$$

$$=\frac12\left(\frac{-1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}+\frac13\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}+\frac16\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac13\right)^n(z-2)^n$$

$$=-\frac12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}+\frac16\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac13\right)^n(z-2)^n$$

… Ans.

8 (15点) 関数 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2(z-1)}$ の特異点, その種類, および, その点における留数を求めよ.

特異点は $z=0,\ 1$ の2つ.

$\underline{z=0}$ については　$n\geqq 3$ について

$z^n f(z)=z^{n-2}\cdot\dfrac{e^{1/z}}{z-1}$ は $z\to 0$

で発散するので 真性特異点.

$\underline{z=1}$ については

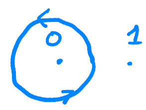
$(z-1)f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{z^2}\to e \quad (z\to 1)$

より 1位の極

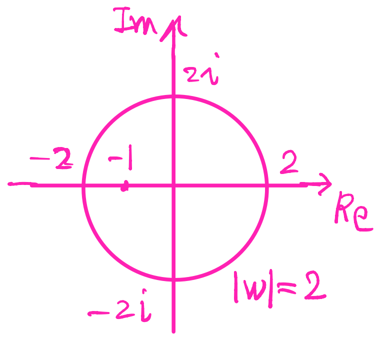
それぞれの留数を求めると.

$$\mathrm{Res}(f,1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{e^{\frac1z}}{z^2}=\boxed{e}.$$

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\boxed{\frac12}}\frac{e^{\frac1z}}{z^2(z-1)}dz$$



ここで $z=\dfrac1w$ とおくと　$\dfrac{dz}{dw}=\dfrac{-1}{w^2}$



$$(\text{上式})=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|w|=2}\frac{e^w}{\frac{1}{w^2}\left(\frac1w-1\right)}\frac{-dw}{w^2}$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|w|=2}\frac{w\,e^w}{w-1}dw$$

Cauchyの積分公式

$$=-we^w\Big|_{w=1}=\boxed{-e}.$$

難

$\dfrac{e^{1/z}}{z^2(z-1)}$

(注意)

$$f(z)=\frac{-1}{z^2}\left(1+\frac1z+\frac1{2!}\frac1{z^2}+\frac1{3!}\frac1{z^3}+\cdots\right)(1+z+z^2+z^3+\cdots)$$

の $\dfrac1z$ の係数は

$$-\left(1+\frac1z+\frac1{2!}\frac1{z^2}+\frac1{3!}\frac1{z^3}+\cdots\right)(1+z+z^2+z^3+\cdots)$$

の z の係数であり, それは

$$-\left(1+1+\frac1{2!}+\frac1{3!}+\cdots\right)=-e.$$

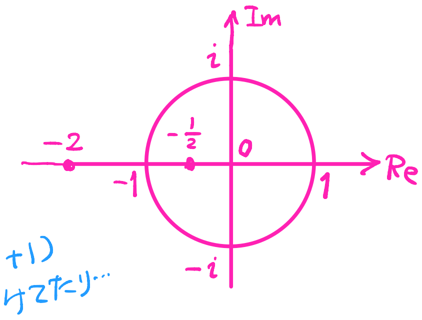
学籍番号

9a (10 点) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\cos\theta}\,d\theta$ の値を求めよ.

9b (10 点) 次の定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}\,dx$ の値を求めよ.

9a

$z=e^{i\theta}$ とおくと, $\cos\theta=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$. このとき



$$(\text{与式})=\int_{|z|=1}\frac{1}{5+2(z+z^{-1})}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5z+2}\,dz$$

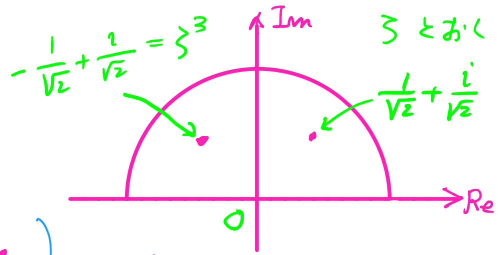
$(2z+1)$ を掛けてたり…

$$=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{(2z+1)(z+2)}\,dz=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}}{(z+\frac{1}{2})(z+2)}\,dz=\frac{1}{i}\cdot2\pi i\cdot\frac{\frac{1}{2}}{z+2}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=2\pi\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{3}\ \cdots\ \text{Ans.}$$

9b

$$I_R=\int_{\frown}\frac{e^{iz}}{z^4+1}\,dz$$ を考へる.

$z=Re^{i\theta}$ $(\theta:0\to\pi)$



ここで $\left|e^{Re^{i\theta}}\right|=\left|e^{-R\sin\theta+iR\cos\theta}\right|=e^{-R\sin\theta}<e^{-R\cdot0}=1.$

$$\therefore\ \left|\int_{\frown}\boxed{〃}\,dz\right|\le\int_{\frown}\left|\boxed{〃}\right||dz|\le\frac{1}{R^4-1}\cdot\pi R\to0.\quad(R\to\infty)$$

$e^{ix-y}=e^{-y}(\cos x+i\sin y)$

ここが書けてない!

従って $$(\text{与式})=\text{Re}\int_{\frown}\frac{e^{iz}}{(z-\zeta)(z-\zeta^3)(z-\zeta^5)(z-\zeta^7)}\,dz$$

$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{8}}$ とおく.

$$=\text{Re}\left[2\pi i\cdot\underbrace{\frac{e^{i\zeta}}{(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)}}_{=\text{Res}(\zeta)}+2\pi i\,\underbrace{\frac{e^{i\zeta^3}}{(\zeta^3-\zeta)(\zeta^3-\zeta^5)(\zeta^3-\zeta^7)}}_{\text{Res}(\zeta^3)}\right]$$

$\zeta^2(\zeta-\zeta^7)\ \ \zeta^2(\zeta-\zeta^3)\ \ \zeta^2(\zeta-\zeta^5)$

$$=\text{Re}\left[2\pi i\cdot\frac{e^{i\zeta}+ie^{i\zeta^3}}{2\sqrt{2}(-1+i)}\right]$$

ここで $(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)=\sqrt{2}(1+i)\sqrt{2}\,i=2\sqrt{2}(1+i)i=2\sqrt{2}(-1+i).$

また,

$$e^{i\zeta}+ie^{i\zeta^3}=e^{\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}+ie^{-\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}}+ie^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+i\sin\frac{1}{\sqrt{2}}+i\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+i).$$

$$\frac{e^{i\zeta}+ie^{i\zeta^3}}{2\sqrt{2}(-1+i)}=\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}\left(e^{i\zeta}+ie^{i\zeta^3}\right)$$

$$=-\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+i)^2$$

$$=-i\,\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\therefore\ (\text{与式})=2\pi\cdot\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \cdots\ \text{Ans.}$$

学籍番号

$\boxed{7}$ (10 点) 函数 $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$ の $1 < |z-2| < 3$ における Laurent 展開を求めよ.

$$\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}(z-2)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z-2)^{k+1}}$$

$$1 < |z-2| < 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots}{\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots}\right)$$

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\,dz = \oint_{|w|=1} e^{-w}\cdot\frac{1}{w^2}\,dw = 2\pi i\, e^{-0} = 2\pi i$$

$\boxed{8}$ (15 点) 函数 $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2(z-1)}$ の特異点, その種類, および, その点における留数を求めよ.

$$f(z) = \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\underbrace{\frac{-1}{z^2}\left(1+z+z^2+\cdots\right)}$$

$$= \frac{-1}{z^2}\left(z \text{ の [illegible]}\right)$$

$$= \frac{-1}{z^2}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)z+\cdots$$

$$= \cdots + \frac{1}{z^2}\cdot z\cdot e + \cdots$$

$$\frac{e \to n}{e \to n+1}$$

$$\left(\frac{-1}{z}+\frac{-1}{z^2}+\frac{1}{z-1}\right)e^{\frac{1}{z}}$$

$$= \frac{az(z-1)-(z-1)+z^2}{z^2(z-1)}$$

$$-b = 1 \qquad c = 1 \qquad a = -1$$

$$= \frac{az^2-z-z+1+z^2}{}$$

$$\int_{|z|=1/2}\frac{e^{1/z}}{z-1}\,dz \qquad w = \frac{-1}{z} \qquad \frac{dz}{dw} = \frac{1}{w^2}$$

$$= \int_{|w|=2}\frac{e^{-w}}{-1/w-1}\left(-\frac{dw}{w^2}\right)$$

$$= +\int_{|w|=2}\frac{e^{-w}}{1+w}\cdot\frac{1}{w}\,dw$$

$$= 2\pi i\left\{\left(\frac{e^{-w}}{1+w}\Big|_{w=0}\right)+\left(\frac{e^{-w}}{w}\Big|_{w=-1}\right)\right\}$$

$$= 2\pi i\cdot\left(1+\frac{e}{-1}\right)$$

学籍番号

9a (10 点) 定積分 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\theta}\, d\theta$ の値を求めよ.

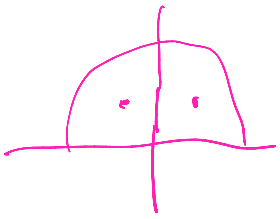
9b (10 点) 次の定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\, dx$ の値を求めよ.

$z = e^{i\theta}$ $\quad \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{5+2(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5z+2}\, dz$$

$$= \frac{1}{i}\oint \frac{1}{(2z+1)(z+2)}\, dz = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i \left.\frac{1/2}{z+2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2\pi\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \ //$$



$$(与式) = \int_{\Delta} \frac{\cos z}{(z-\zeta)(z-\zeta^3)(z-\zeta^5)(z-\zeta^7)}\, dz$$

$$\cos\zeta = \frac{e^{\zeta}+e^{-\zeta}}{2}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\cos\zeta}{(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)}$$

$$+ 2\pi i \frac{\cos\zeta^3}{(\zeta^3-\zeta)(\zeta^3-\zeta^5)(\zeta^3-\zeta^7)}$$

$\zeta^2(\zeta-\zeta^7)$ $\quad \zeta^2(\zeta-\zeta^3)$ $\quad \zeta^2(\zeta-\zeta^5)$

$$e^{\zeta} - ie^{-\zeta^3}$$
$$= e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} - ie^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)}$$
$$= e^{1/\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + ie^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= 2\pi i \frac{\cos\zeta - i\cos\zeta^3}{\quad}$$

$$e^{-\zeta} + ie^{+\zeta^3} = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)} = e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\left(e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\therefore \cos\zeta - \cos\zeta^3 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\underbrace{\left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)}_{2\cos\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) 2\cos\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)$$
$$= \sqrt{2}(1+i)\sqrt{2}\, i = 2(1+i)i = 2(-1+i) \quad ?$$

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体，$\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環，$\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体，
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体，$\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体，

既習事項のまとめ

(1) 曲線は常に区分的に滑らかな曲線を指すものとする．

(2) 実数 t が $a \to b$ と変化するに従つて $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ は $\alpha \to \beta$ と変化して，曲線 C を辿るものとするとき，函数 $f(z)$ について，次の様に複素積分を定める：このとき

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_a^b f\big(x(t) + i\,y(t)\big)\,z'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b \big\{u\big(x(t), y(t)\big)\,x'(t) - v\big(x(t), y(t)\big)y'(t) + iv\big(x(t), y(t)\big)\,x'(t) + iu\big(x(t), y(t)\big)\,y'(t)\big\}\,dt.$$

(3) $r > 0$ を定数，$a \in \mathbb{C}$ を定点，$n \in \mathbb{Z}$ とする．次が成り立つ：

$$\int_{|z-a|=r} (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1 \text{ のとき}), \\ 2\pi i & (n = -1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

以降では，この記法は円 $|z-a| = r$ を反時計廻りに周る積分を表すものとする．

(4) Cauchy の積分定理．D は有界な領域で ∂D は Jordan 曲線の和集合で構成されてゐるとする．$f(z)$ が D の閉包 $\overline{D}$ を含む集合で正則であれば

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

(5) (4) の系．単連結領域で正則な函数はそこで原始函数を有する．

(6) Cauchy の積分公式．D は有界な領域で ∂D は Jordan 曲線の和集合で構成されてゐるとする．$f(z)$ が D の閉包 $\overline{D}$ を含む集合で正則であれば，D 内の点 z について

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

(7) Cauchy の導函数積分公式．$f(z)$ は (6) と同じ仮定を満たすとする．$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

(8) Morera の定理．D 内の任意の Jordan 閉曲線 C について

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

ならば，$f(z)$ は D 上で正則である．

(9) Liouville の定理．全複素数平面で有界な正則函数は定数函数である．

(10) 代数学の基本定理．$n \in \mathbb{N}$ 複素数係数の n 次代数方程式は複素数体の中に重複度も勘定して丁度 n 個の根を持つ．

(11) 最大値の原理．領域 D で正則な函数 $f(z)$ に対し $|f(z)|$ は D 内で最大値をとらない．

(12) 領域 D 上で正則な函数からなる函数列 $\{f_n(z)\}$ が D で compact 一様に $f(z)$ に収束するとき，$f(z)$ も D で正則であつて，導函数列 $\{f_n{}'(z)\}$ は D で compact 一様に $f'(z)$ に収束する．

(13) 領域 D 上で正則な函数 $f(z)$ を項とする級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

の部分和からなる函数列について (12) に適用すれば，それが項別微分，項別積分できることが示される．

(14) Cauchy-Hadamard の定理．数列 $\{c_n\}$ に関して

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

とおく．このとき 冪級数

$$\sum_{n=0} c_n\,z^n$$

は $\{z; |z| < \rho\}$ で絶対かつ compact 一様に収束する．また $\{z; |z| > \rho\}$ で発散する．ρ をこの級数の収束半径と称する．この級数の定める函数は $\{z; |z| < \rho\}$ 上で正則である．

(15) d'Alambert の定理．数列 $\{c_n\}$ に関して

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

が存在すれば，この極限は (14) の ρ に一致する．

(16) (13) の特別な場合（a を定数として，第 n 項が $c_n(z-a)^n$ のとき）の

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n$$

の収束半径は，これを項別微分した

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,(z-a)^{n-1}$$

と一致し，これが導函数 $f'(z)$ に一致する．それゆゑ，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}\,(z-a)^{n-1}$$

の収束半径もそれらと一致し，これの導函数は $f(z)$ である．（項別積分）

(17) 点 a を中心とした，正の収束半径を持つ整級数に展開される函数は a で解析的，あるいは，a における解析函数であるといはれる．

(18) Taylor の展開定理．点 a で正則な函数 $f(z)$ は解析的であり，整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n$$

に展開される．((14) の最後の主張の逆を含む．)

(19) 特異点．函数 $f(z)$ は領域 D 上で定義されてゐるとせよ．a を D の閉包 $\overline{D}$ に属する定点とする．a を中心とした正の収束半径（r とする）を持つ整級数が存在して，$U_r(a) \cap D$ 上で，それが $f(z)$ と一致するならば a を $f(z)$ の正則点と呼ぶ．さもなくば a を $f(z)$ の特異点と呼ぶ．

(20) Cauchy の評価式．a を定点，R と M を正定数とし，函数 $f(z)$ は次の (1) または (2) を満たすとする：
(a) 領域 $|z-a| < R$ で正則で，この領域で $|f(z)| \leqq M$；
(b) 円板 $|z-a| \leqq R$ を含む領域で正則かつ円 $|z-a| = R$ 上で $|f(z)| \leqq M$.
このとき，次が成り立つ：

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leqq \frac{M}{R^n}.$$

(21) 一致の定理．領域 D 内の点 b，および，b と異なる点からなる，b に収束する点列 $\{a_n\}$ があり，D で正則な 2 つの函数 $f(z)$ と $g(z)$ が $f(a_n) = g(a_n)$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）を満たすとき，D 全体で $f(z) = g(z)$ である．

(22) 定数 c_n（$n \in \mathbb{Z}$）と定点 $a \in \mathbb{C}$ について，z を変数とした級数

$$\cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

を Laurent 級数と呼ぶ．

(23) Laurent 展開定理．円環領域 $0 < |z-a| < R$ で正則な函数 $f(z)$ はこの範囲で絶対かつ compact 一様に収束する a を中心とした Laurent 級数に展開できる．その n 次の展開係数は，任意の $0 < r < R$ なる r をとつて

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

で与へられる．これと (18) を合はせたものは Cauchy の導函数積分公式 (7) に他ならない．

(24) 点 a と函数 $f(z)$ について，正の数 r が存在して，$f(z)$ が領域 $0 < |z-a| < r$ で a を中心として Laurent 展開できるとき，a を $f(z)$ の孤立特異点と称する．さらに，その Laurent 展開の $(z-a)$ の負冪の項からなる部分和が 0 であるか，有限個の項からなるか，無限個の項からなるかによつて，除去可能特異点（簡単な定義変更で正則点になる），極，真性特異点の 3 種類に分類される．

(25) (23) の状況で $k < 0$, $c_{-k} \neq 0$ かつ，すべての $n > k$ について $c_{-n} = 0$ となる k が存在するとき，$f(z)$ は a で k 位の極をもつ，あるいは，位数 k の極をもつ，などといふ．

(26) (18) の状況で，$f^{(\ell)}(a) \neq 0$ かつ，すべての $n > \ell$ について $f^{(n)}(a) = 0$ となる ℓ が存在するとき，$f(z)$ は a で ℓ 位の零点をもつ，あるいは，位数 k の零点をもつ，などといふ．

(27) (22) の記号で c_{-1} を $f(z)$ の a における留数とよび，

$$c_{-1} = \mathrm{Res}(f, a) = \mathrm{Res}(a) = \mathop{\mathrm{Res}}_{z=a} f(z)$$

などと表す．

(28) k 位の極については $(z-a)^k$ を掛けてから $k-1$ 回微分して $z \to a$ とした値から留数を求められる．

(29) 函数 $f(z)$ とその孤立特異点 a に対して，$\{z; 0 < |z-a| < r\} \subset D$ となる r をとつて

$$\mathrm{Res}(a, f) = \mathrm{Res}(a) = \mathop{\mathrm{Res}}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)dz$$

と定め，これを $f(z)$ の a における留数と称する．

(30) 閉曲線 C を周回する複素積分と C 囲む領域内の孤立特異点での留数をうまく利用して（留数定理），実軸上の不定積分が計算し辛い函数の定積分を計算することができることが多い．