

複素解析

(解析学3)

2022年度版

はじめに

この講義録は、名城大学理工学部数学科の3年生向けに「解析学3」として開講されてゐる 複素函数論 (複素解析) について述べたものであるが、「解析学2」の内容の説明も含めてある (まだ細部が書けてゐないが) .

「複素函数論」は単に「函数論」とも呼ばれる. これを学んだ者は、微分積分学の鬱屈した空気が嘘の様に晴れて、非常に見晴しのよい場所に立つて全方位の絶景を楽しむ感覚を持つと思はれる.

複素函数論は解析学を志す者だけでなく、数学の中では非常に広範に使用される重要な分野である. 微分積分学で学んだほとんどの函数は全数学を通じてたいへん重要であるが、それらの変数は自然に複素数まで拡張される. それによつて本領を發揮する. より高度な (しかし有用な) 函数を使ひ熟するためには、複素函数論の理解が必須である.

この講義 note の流れは [sy] に基づいて構成されてゐるが、[sy] には誤りが散見されるので、多くの点で修正を施してある. また、ところどころで Ahlfors の名著 [A] から抜き出してゐる. 特に、この講義録で Ahlfors の補題 と名付けた補題 24.3 は (特にその証明が) よく工夫されたものであるので、十分に味はつていただきたいと思ふ.

問題は主に [hk] と [sy] から借用してゐる.

文 献

[A] L.V. Ahlfors : Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company,
(和訳『複素解析』, L.V. アールフォルス 著, 笠原乾吉 翻訳, 現代数学社, 1982 年)

[sy] 佐藤恒雄, 吉田英信 : 初歩から学べる 複素解析, 2001~2006 年, 培風館

[T] 高橋 正明 著 : 『複素数』 モノグラフ (9) , 科学新興社
ISBN: 489428166X; 改訂版 (1998/07)

[TK] 辻 正次, 小松 勇作 : 大学演習 函数論, (356 pages), 裳華房 1959 年初版

[hk] 裕野敏博, 加藤芳文 : 理工系の基礎 複素解析, 2001 年, 学術図書

[M] 三宅 敏恒 : 入門微分積分, 1992 年, 培風館

[Y] 吉田 洋一 : 函数論 第2版, 1973 年, 岩波全書

広範な話題が精密に書かれた本として [A] を勧める. [Y] は古く小さい本にも拘はらず、豊富な内容を含む.

課題に取り組む際の注意

- (1) わからないところもあろうかと思ひます。そのときは、なにがわからないか、どこで行き詰まつてゐるのか (詳しい質問) を記述して提出して下さい。一見してわからなくても、あきらめないで!
- (2) 失敗を積み重ねない限り、真の答など見つかる筈がない。
例を自分で作つて計算してみるとか、なんらかの突破口を探してみてください。
- (3) レポートには **学籍番号**, **氏名** はもちろんのこと, 必ず **問題文** も書くこと。
- (4) 1 page に 1 問, が見易い。
- (5) この資料をよく読んでください。Hint は当該問題の直前あたりに必ずあります!
- (6) 複素数の基礎的なところを時間を掛ける余裕がありません。
たとへば [T] は高校生向けの参考書ですが, 読めば得る事が多いと思ひます。
- (7) [sy] には細かな誤りが散見されます。
別紙リスト (大西の Web page からも download 可) を参照ください。

目次

1	複素数と複素数平面	1
1	複素数	1
2	複素数平面, 極形式	4
3	複素数の図形への応用	5
4	複素解析の重要性	6
2	複素関数の微分	9
5	開集合, 近傍, 領域	9
6	複素関数の定義	11
7	複素関数の極限と連続性	13
7.1	極限	13
7.2	連続性	13
8	複素関数の微分	14
9	正則関数	16
10	Cauchy-Riemann の関係式	18
11	Cauchy-Riemann の関係式の応用	20
12	指数関数	23
13	対数関数	25
14	複素三角関数, 双曲線関数	27
15	一般の累乗	29
16	逆三角関数, 逆双曲線関数	31
3	複素積分と Cauchy の定理	33
17	曲線	33
18	複素積分	37
19	Cauchy-Riemann の関係式から Cauchy の定理へ	43
20	Cauchy の積分定理	48
21	曲線の絡数, homology 同値, 単連結領域	56
22	Cauchy の定理の一般形	57
23	Cauchy の積分表示	58
24	Cauchy の導関数積分公式	61
25	Cauchy の導関数積分公式の応用	65
26	調和関数	68
27	等角写像	70
4	関数の冪級数展開	73

28	数列と級数の収束と発散	73
29	関数列	77
30	整級数の性質	83
31	項別微分と項別積分	87
32	正則函数の冪級数展開	89
33	一致の定理	93
34	基本的な函数の Taylor 展開	95
35	Laurent 展開	97
36	孤立特異点の分類	103
5	留数とその応用	107
37	留数の定義と求め方	107
38	留数定理	110
39	留数定理の実数函数定積分への応用	112
39.1	三角函数の有理函数の積分計算	113
39.2	有理函数の無限区間での積分計算	114
39.3	有理函数と三角函数の積の無限区間での積分計算	116
39.4	有理函数と一般冪乗単項式の積の無限区間での積分計算	117
39.5	Fresnel 積分	119
40	偏角の原理	121
41	述べたいことやこの先にあるもの	123
42	Notes	124
		125
43	略解答集	128

第1章 複素数と複素数平面

§1. 複素数

複素数 複素共役 (共役) ...

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

例題 1.1 2 次方程式 $z^2 - (3 - i)z + (2 + 3i) = 0$ を解け.

解答

□

問 1.2 $z^2 = 3 + 4i$ を解け. (Hint : 「代数学 1」)

演習問題

1.3 次の 2 次方程式を解け. [= [sy], p.4, 問 1]

(1) $x^2 + 3 = 0$ (2) $2x^2 + 3 = 0$ (3) $x^2 + 2x + 3 = 0$

1.4 次の計算をせよ. [= [sy], p.5, 問 3; p.6, 問 4]

(1) $(3 + 2i) + (-2 + 3i)$.

(2) $(4 + 3i) - (-2 - 3i)$.

(3) $(1 - i) - (-1 - i)$.

(4) $(1 + 3i)(1 - 3i)$.

(5) $(-1 + 2i)(-1 - 3i)$.

(6) $(3 - i)(1 + 3i)$.

1.5 次の不等式が常に成り立つことを示せ. [= [sy], p.11, 問 6]

(1) $|z|^2 + (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} + 2 \geq 0$.

(2) $|z|^2 + iz - i\bar{z} + 1 \geq 0$.

(3) $|z|^2 - az - i\bar{a}\bar{z} + |a|^2 \geq 0$.

1.6 問 8 (p.14) から 問 25 (p.34) まで,

1.7 問 27 から 問 29 (p.35) まで.

1.8 章末問題 (p.37) のすべて.

§ 2. 複素数平面, 極形式

領域

書物によつては複素平面といふ言葉を複素数平面と無限遠点 ∞ を合はせたものと定義してゐるから十分注意されたい. (= [TK], p.4, 脚注)

§ 3. 複素数の図形への応用

ここでは初等幾何学を複素平面上で展開し、そこに複素函数を応用することなどを学ぶ。

複素関数による図形の像・逆像の求め方 (特に p.40) 写像 (関数) $w = f(z)$ に関する $\varphi(z) = 0$ (あるいは $\varphi(z) > 0$ etc.) の像を求めるには

- ① $w = f(z)$ を z について解いて $z = f^{-1}(w)$ を書き下す.
- ② これを $\varphi(z) = 0$ (または $\varphi(z) > 0$ etc.) に代入して

$$(3.1) \quad \varphi(f^{-1}(w)) = 0 \quad (\text{または } \varphi(f^{-1}(w)) > 0 \text{ etc.})$$

を得る. これが求める像の方程式だ. 原理はこれだけ!

実際の形を知るには, 上記 (3.1) を簡単な形に変形する必要がある. その処理は状況次第だ.

例題 3.2 (p.40, 例題 1) $|\lambda| = 1, |a| < 1$ ならば 1 次分数変換 $w = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ は単位円 $|z| < 1$ を単位円 $|w| < 1$ に写すことを証明せよ.

解答 $w = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ を z について解く:

$$\begin{aligned} w(1 - \bar{a}z) &= \lambda(z - a), & \therefore w + \lambda a &= \lambda z + \bar{a}wz, & \therefore w + \lambda a &= z(\lambda + \bar{a}w), \\ & & \therefore z &= \frac{w + \lambda a}{\bar{a}w + \lambda}. \end{aligned}$$

ゆえに $|z| < 1$ の像は

$$\begin{aligned} \left| \frac{w + \lambda a}{\bar{a}w + \lambda} \right| < 1, & \quad \therefore |w + \lambda a| < |\bar{a}w + \lambda|, & \quad \therefore |w + \lambda a|^2 < |\bar{a}w + \lambda|^2, \\ & \therefore (w + \lambda a)(\bar{w} + \bar{\lambda}\bar{a}) < (\bar{a}w + \lambda)(a\bar{w} + \bar{\lambda}), \\ & \therefore w\bar{w} + \bar{\lambda}\bar{a}w + \lambda a\bar{w} + \lambda\bar{\lambda}a\bar{a} < a\bar{a}w\bar{w} + \bar{\lambda}\bar{a}w + \lambda a\bar{w} + \lambda\bar{\lambda}, \\ & \therefore (1 - |a|^2)w\bar{w} < 1 - |a|^2. \\ & \therefore (1 - |a|^2)(|w|^2 - 1) < 0. \end{aligned}$$

ここで $|a| < 1$ より $|a|^2 < 1$, つまり $1 - |a|^2 > 0$ なので

$$\therefore |w| < 1$$

となる. □

§ 4. 複素解析の重要さ

ここで複素解析を学ぶ意義を述べておく。

1. 微分積分学はある意味で指数函数, 対数函数, 三角函数, 逆三角函数に慣れ親しむことが目的であつたが, 実数だけの範囲ですべてを説明しなくてはいけないので, 技巧的な方法で計算しなくてはならないことが多かつた. 卑近な一例として, 積分

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

を計算するとき, 被積分函数の分母の 2 次式の判別式の正負で場合を分けてみたが, 複素解析を学ぶことで, その場合分けは不要となる. 同時に対数函数 \log と逆正接函数 \tan^{-1} が本質的に一体であることに気付く. 煩雑な計算を避けて, きはめて自然な計算で目的の値を得ることができるようになる.

2. Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

に代表される様に, 複素函数の世界では 今までばらばらだつた函数達がその繋りを見せてくれる. 三角函数の加法定理が実は指数法則と同じことの表裏一体の関係であることに気付かされる. 筆者の個人的な経験的感覚を述べると, あたかも, 実数の世界でばらばらだつた数たちが, 連分数の理論でその繋りを見せるようになるのと似てゐる.

3. さらに, 微分積分学ではなかなか手に負へない定積分の値を簡単に求めることができるようになる. 一例として, 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos z}{1+x^2} dx$$

を求めるのに, これまでの知識では被積分函数の原始函数は求められない. しかし, 複素解析を学べば, かなり簡単な計算で, この値が

$$\frac{\pi}{2e} (= 0.5778636750\dots)$$

になることを導ける. この様な理論は解析学の代数化である言へるのではないか.

4. 特異点といふ概念を学ぶことで, 微積で学んだ収束半径の意味が明瞭になる.

5. 調和函数と呼ばれる応用上非常に重要な函数は正則函数 (微分できる函数) は表裏の関係にあつて...

第2章 複素関数の微分

§5. 開集合, 近傍, 領域

開集合, 閉集合,

定義 5.1 $A \subset \mathbb{C}$ を含むあらゆる閉集合の共通部分を A の 閉包 と呼び, \bar{A} で表す. また $A \subset \mathbb{C}$ に含まれるあらゆる開集合の和集合を A の 内部 と呼び, A° で表す. A° に含まれる点を A の 内点 と呼ぶ.

近傍, 相対的開集合

定義 5.2 \mathbb{C} の部分集合 A は, それが2つの相対的開集合の合併としては表せないとき, 連結 であるといはれる.

定義 5.3 \mathbb{C} の開かつ連結な D を 領域 と呼ぶ.

定義 5.4 領域 D の補集合 $\mathbb{C} - D$ が連結であるとき, D は 単連結 (或いは 単一連結) といはれる.

例 5.5

- (1) $\{z; |z| < 1\}$ は単一連結な領域である.
- (2) $\{z; |z| < 1\} \cup \{z; |z - 3| < 1\}$ は連結でない. 従つて領域でもない.
- (3) \mathbb{R} は連結であるが, 開集合ではないので領域でない.
- (4) $\{z; \operatorname{im} z > 0\}$ は単一連結な領域である.
- (5) $\{z; 1 < |z| < 2\}$ は単一連結でない領域である.
- (6) $\{z; 1 \leq |z| < 2\}$ は連結であるが開集合でないので領域でない.
- (7) $\{z; 0 \leq \operatorname{re} z \leq 1\}$ は単一連結であるが開集合でないので領域でない.

記法 この講義録を通して, 以下の記号を使ふ.

正の数 d に対して

$$U_d(a) = \{z; |z - a| < d\}.$$

演習問題

5.6 単位円 $D = \{z; |z| < 1\}$ が開集合であることを, 実際に, 各点 $z_0 \in D$ に対して z_0 の近傍 $U_r(z_0) \subset D$ がとれることを示すことで説明せよ. [= [sy], p.41, 問 2 ○]

5.7 $A = \{a; |z| < 2\}$ とおく. 次の集合がそれぞれ開集合であることを証明せよ.
[= [sy], p.42 問 3 △]

- (1) A .
- (2) $B = A \cap \{a; \operatorname{re} z \neq 0\}$.
- (3) $B = A \cap \{a; |z| > 1\}$.

§ 6. 複素関数の定義

領域 $D \subset \mathbb{C}$ の各点 z に複素数を対応させる規則が定められてゐるとき, その対応を写像の記法を使つて $z \rightarrow f(z)$ の様に記し, この様な規則を 複素関数 と呼ぶ. この講義では単に 関数 と呼ぶことが多い. この f がその規則を象徴的に表す文字である. いくつかの複素関数の例を挙げておく.

例 6.1 全平面 \mathbb{C} を定義域として, 函数 $z \rightarrow z^2$ を考へる. これを図示してみたい.

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

とおくと,

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

だから

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

$y = b$ が一定で, x が変化するとき

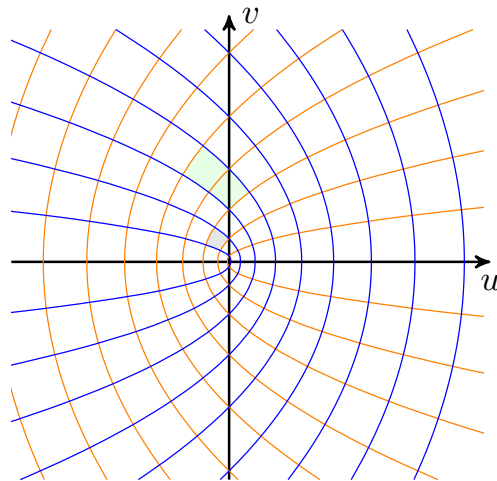
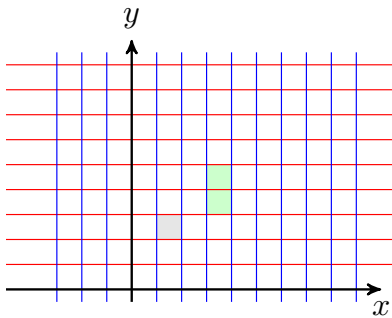
$$v^2 = 4x^2b^2 = 4b^2(u + b^2).$$

$$\therefore u = \frac{1}{4b^2} v^2 - b^2$$

$x = a$ が一定で, y が変化するとき

$$v^2 = 4a^2y^2 = 4a^2(a^2 - u).$$

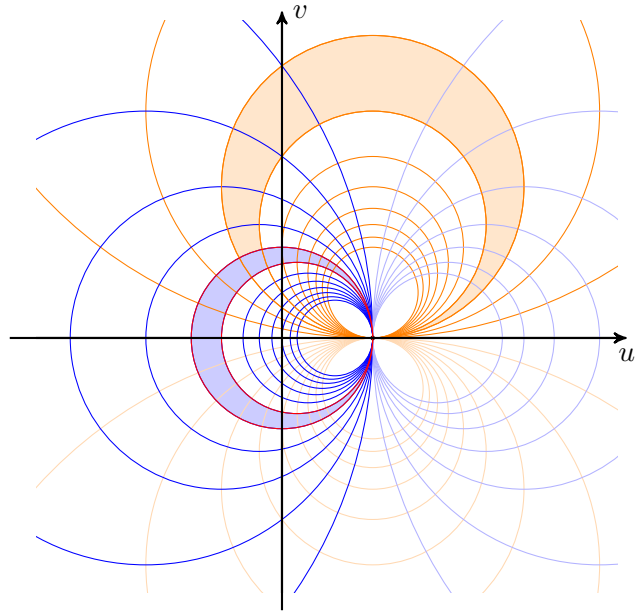
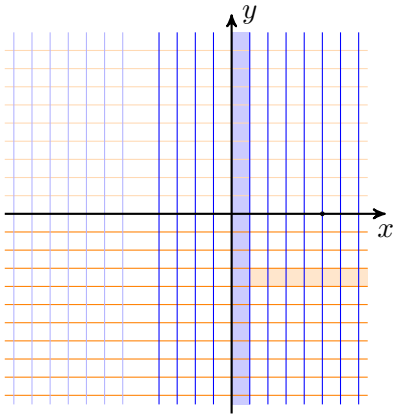
$$\therefore u = -\frac{1}{4a^2} v^2 + a^2$$



例 6.2

$$w = \frac{z-1}{z+1}.$$

$$z = x + iy, \quad w = u + iv.$$



§ 7. 複素函数の極限と連続性

7.1. 極限

定義 7.1 $f(z)$ は点 α の近傍 U から α を除いた集合上で定義された函数とし, $A \in \mathbb{C}$ を定数とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ が存在して, 任意の $z \in U$ について

$$|z - \alpha| < \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon$$

が成り立つとき, z が α に近づくときの $f(z)$ の 極限值 は A であるといひ,

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = A$$

と記す. またこの様な A が存在するとき, $f(z)$ は z が α に近づくときに 極限值を持つ, あるいは $f(z)$ は A に 収束する といふ.

7.2. 連続性

定義 7.2 $f(z)$ は点 α を含む集合 U で定義された函数とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ が存在して, 任意の $z \in U$ について

$$|z - \alpha| < \delta \implies |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

が成り立つとき, 即ち

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha)$$

となるとき $f(z)$ は α において 連続 であるといはれる.

演習問題

7.3 次の極限について, 極限值が存在するか否か理由を付して答へよ. 存在する場合はその値も答へよ. [= [sy], p.43, 問 4 ㊟]

(1) $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z^n - \alpha^n}{z - \alpha}$ (n は自然数).

(2) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^a}{z}$ ($a > 0$ は定数).

7.4 $\bar{z}, |z|, \operatorname{re} z$ は全複素数平面上で連続函数であることを示せ. また, 函数 $f(z)$ が領域 D で連続であれば $\overline{f(z)}, |f(z)|, \operatorname{re} f(z)$ も D で連続であることを証明せよ. [= [sy], p.45, 問 5]

§ 8. 複素函数の微分

定義 8.1 点 α の近傍 U で定義された函数 $f(z)$ について, 極限值

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + \eta) - f(\alpha)}{\eta}$$

が存在するとき, この極限値を $f'(\alpha)$ と書いて $f(z)$ の α における 微分係数 といふ. また, $f(z)$ は α において 微分可能 であるといふ.

定義 8.2 函数 $f(z)$ が領域 D のあらゆる点で微分可能のとき, 新たな函数 $D \ni z \rightarrow f'(z)$ が得られる. これを $f(z)$ の 導函数 と称する. これを計算するときの便宜のため, 通常, 以下の様に記す:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Δz は解析学の伝統的な記法である.

命題 8.3 公式など $f(z)$ と $g(z)$ が $z = \alpha$ で微分可能であれば

- (1) $(cf)'(\alpha) = c f'(\alpha)$.
- (2) $(f + g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha)$.
- (3)
- (4)

命題 8.4 合成函数の微分...

演習問題

8.5 次の函数が微分可能である点を求めよ. [= [sy], p.48, 問 7 改題 ◎]

(1) $f(z) = |z^2|$.

(2) $f(z) = \operatorname{im} z$

8.6 7.3(1) を利用して $f(z) = z^n$ の導函数を求めよ. [= [sy], p.49, 問 8]

8.7 函数 $w = \frac{1}{z}$ の導函数を求めよ. [= [sy], p.49, 問 9 ◎]

8.8 次の函数の導函数は存在するか否かを理由を付けて答へよ. 存在する場合はそれを求めよ. [= [sy], p.49, 問 10]

(1) $w = \bar{z}^2$.

(2) $w = z^4 + 2z^2$.

8.9 次の函数の導函数を求めよ. [= [sy], p.50, 問 11 改題 ◎]

(1) $w = (3z + 1)^3$.

(2) $w = (z + z^{-1})^3$.

(3) $w = (z^2 + 3z + 1)^3$.

§ 9. 正則函数

定義 9.1 (正則性) 函数 $f(z)$ が点 z_0 のある近傍の至るところで微分可能であるとき, $f(z)$ は z_0 で 正則 であるといはれる. 函数 $f(z)$ が領域 D の至るところで正則であるとき, $f(z)$ は D で正則であるといはれる. また $f(z)$ は D 上の 正則函数 であるともいはれる.

例 9.2 函数 $z \rightarrow |z|^2$ は $z = 0$ で微分可能ではあるが正則ではない.

命題 9.3 (1) 正則函数の scalar 倍や加減乗除は正則
(2) 正則函数に正則函数を代入しても正則.

命題 9.4 微分可能性の ε を使った定式化. 函数 $f(z)$ が z_0 で微分可能で $f'(z_0) = A$ であるためには, z_0 のある近傍 U で

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \varepsilon(z; z_0)(z - z_0),$$

と書けることである. 但し $\varepsilon(z; z_0)$ は

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z; z_0) = 0$$

を満たす U 上の函数である.

命題 9.5 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ($z = x + iy$) が $z = \alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) で微分可能であれば定義から

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial y}(a, b). \end{aligned}$$

それゆゑ $f(z)$ が領域 D で正則であれば各 $z = x + iy$ において

$$(9.6) \quad \begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

である.

演習問題

9.7 $f(z)$ が $z = \alpha$ で微分可能であれば $f(z)$ は $z = \alpha$ で連続であることを (9.4) によつて確かめよ. [= [sy], p.47, 問 6 ○]

9.8 $f(D)$ が D で正則ならば $f(z)$ は D で連続である. これを示せ.
[= [sy], p.51, 問 12 ○]

§ 10. Cauchy-Riemann の関係式

ここでは非常に重要な Cauchy-Riemann の関係式について説明する.

定理 10.1 (Cauchy-Riemann の関係式)

(1) 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が点 $z_0 = x_0 + iy_0$ で微分可能であれば

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

が成り立つ.

(2) 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が領域 D 正則であれば, D において

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

が成り立つ.

証明 (1) 一言で言へば, $f'(z_0)$ の定義

$$f'(z_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta}$$

において, η を実軸に沿って 0 に近付けても, 虚軸に沿って 0 に近付けても, 結果が一致することに注意すればよい. 以下, 詳しく述べる.

実数 h について $\eta = h$ として $h \rightarrow 0$ とした極限を取れば

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h: \text{実数}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h: \text{実数}}} \frac{(u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h: \text{実数}}} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

一方, 純虚数 ik について $\Delta z = ik$ として $k \rightarrow 0$ とした極限を取れば

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\substack{ik \rightarrow 0 \\ k: \text{実数}}} \frac{f(z_0 + ik) - f(z_0)}{ik} \\ &= \lim_{\substack{ik \rightarrow 0 \\ k: \text{実数}}} \frac{(u(x_0, y_0 + k) + iv(x_0, y_0 + k)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{ik} \\ &= \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k: \text{実数}}} \frac{u(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0)}{ik} + i \frac{v(x_0, y_0 + k) - v(x_0, y_0)}{ik} \\ &= -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

この 2 つが函数として一致するので

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0).$$

これが示したい関係式であつた.

(2) は (1) の式が D の至るところで成り立つのであるから, 明らかである. \square

注意 10.2 正則函数が非常に強い条件を満たす函数であることに気付くであらう.....
([sy], p.53 の 〈注〉)

演習問題

10.3 f は領域 D で正則な函数とし, c を実定数とする. 次のいずれの場合も, $f(z)$ は定数函数であることを証明せよ. [= [sy], p.72, 章末問題 6]

- (1) $\operatorname{re} f = c$.
- (2) $|f| = c$ ($c \geq 0$).

§ 11. Cauchy-Riemann の関係式の応用

微分可能性から Cauchy-Riemann の関係式を導いたが、これの逆が成り立つ。正確に述べる為に全微分可能性を思ひ出しておく。

定義 11.1 \mathbb{R}^2 内の点 (a, b) の近傍 D 上で定義された函数 $g(x, y)$ について、 $(a + h, b + k)$ なる (h, k) に対して定義される $\varepsilon(h, k)$ と (h, k) に依存しない定数 $A, B \in \mathbb{R}$ が存在して、 g が存在して、

$$g(a + h, b + k) - g(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2},$$

$$\lim_{(h, k) \rightarrow 0} \varepsilon(h, k) = 0$$

を満たすとき、 $g(h, k)$ は (a, b) において全微分可能であるといはれる。

命題 11.2 函数 $z = g(x, y)$ が点 (a, b) において全微分可能であれば、偏微分可能であつて、11.1 の記号で、

$$A = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \quad B = \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)$$

である。

定理 11.3 $z_0 = x_0 + iy_0$ の近傍 D で定義された函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ について、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が共に (x_0, y_0) で全微分可能かつ、 (x_0, y_0) で Cauchy-Riemann の関係式を満たすならば、 $f(z)$ は z_0 で微分可能である。

証明 (9.4) 式

$$(11.4) \quad f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \varepsilon(z; z_0)(z - z_0), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z; z_0) = 0$$

を満たす定数 $A \in \mathbb{C}$ と函数 $\varepsilon(z; z_0)$ が存在することを示せばよい。まづ u, v の (x_0, y_0) における全微分可能性と 11.2 から

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_u(x, y; x_0, y_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon_u(x, y; x_0, y_0) = 0;$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_v(x, y; x_0, y_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon_v(x, y; x_0, y_0) = 0$$

と書ける. これにより

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) \\ &= f(z_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + i v_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + i v_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + (\varepsilon_u + i \varepsilon_v)(x, y; x_0, y_0) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

ここで C-R より

$$\begin{aligned} &= f(z_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + i v_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad - v_x(x_0, y_0)(y - y_0) + i u_x(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + (\varepsilon_u + i \varepsilon_v)(x, y; x_0, y_0) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= f(z_0) + (u_x(x_0, y_0)(z - z_0) + i v_x(x_0, y_0))((x + iy) - (x_0 + iy_0)) \\ &\quad + (\varepsilon_u + i \varepsilon_v)(x, y; x_0, y_0) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned}$$

を得る. ここで

$$A = u_x(x_0, y_0)(z - z_0) + i v_x(x_0, y_0), \quad \tilde{\varepsilon}(z; z_0) = (\varepsilon_u + i \varepsilon_v)(x, y; x_0, y_0)$$

と書へば,

$$f(z) = A(z - z_0) + \tilde{\varepsilon}(z; z_0)|z - z_0|$$

さらに

$$\varepsilon(z; z_0) = \tilde{\varepsilon}(z; z_0) \frac{|z - z_0|}{z - z_0}$$

とおくと

$$f(z) = A(z - z_0) + \varepsilon(z; z_0)(z - z_0),$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |\varepsilon(z; z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} |\tilde{\varepsilon}(z; z_0)| = 0$$

であるから (11.4) が示された. もちろん, 以上の結果から $f'(z_0)$ は A で与えられる. □

系 11.5 領域 D で定義された函数 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ($z = x + iy$) について, $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が D の各点で全微分可能かつ, D 上で Cauchy-Riemann の関係式を満たすならば, $f(z)$ は D で正則である.

命題 11.6 領域 D 上で正則な函数の和, 差, 積, 商, scalar 倍もまた正則

演習問題

11.7 函数 $|z|$, $\operatorname{im} z$ はどの点においても正則でない. これを示せ.

[= [sy], p.53, 問 13]

11.8 次の函数が正則な点をすべて求めよ. またそれらの点における導函数を求めよ.

[= [sy], p.54, 問 14 ◎]

$$(1) f(z) = x^3 - y^3 + 2x^2y^2i.$$

$$(2) f(z) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + i \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

11.9 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (つまり $z = re^{i\theta}$) によつて, $u(r \cos \theta, r \sin \theta) = u(x, y)$, $v(r \cos \theta, r \sin \theta) = v(x, y)$ を考へる. このとき, 10.1(2) は

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = r \frac{\partial v}{\partial r}$$

と同値である. またこれらが成り立つとき

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i v_r) = \left(\frac{e^{-i\theta}}{r} \right) (v_\theta - i u_\theta)$$

となる. 以上のことを証明せよ. [= [sy], p.54, 問 15]

11.10 上の 11.9 の結果を用いて $w = z^n = r^n e^{in\theta}$ の導函数を求めよ.

[= [sy], p.54, 問 16]

11.11 正則函数 $f(z)$ の実部が次式で与えられるとき, $f(z)$ の虚部を求め, $f(z)$ を z の式で表せ. [= [sy], p.54, 問 17]

$$(1) u = x^2 - y^2 + y.$$

$$(2) u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (z \neq 0).$$

§ 12. 指数関数

(pp.60-72)

命題 - 定義 12.1 関数

$$(12.2) \quad f : z = x + iy \mapsto e^x(\cos y + i \sin y)$$

は全複素 (数) 平面上で定義され, 至るところ正則である.

(12.2) で定義された関数 f を 指数関数 と呼び

$$f(z) = e^z = \exp z$$

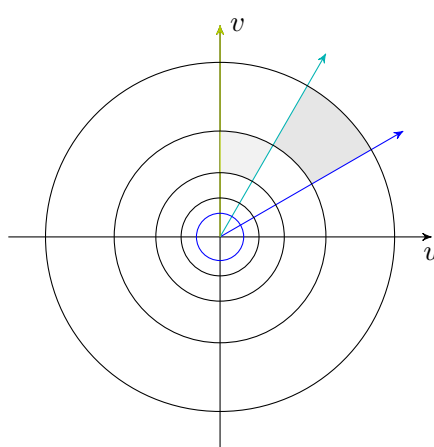
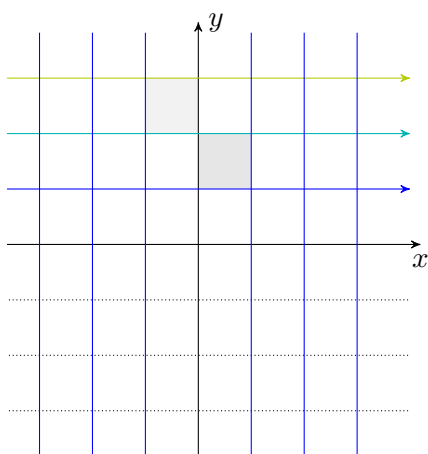
と記す. 定義から z が実数のときは実数関数としての指数関数と一致する.

証明 Cauchy-Riemann の関係式を確認すればよい.

□

注意 12.3 関数 $z \rightarrow e^z$ を図解してみる.

$$z = x + iy \mapsto w = u + iv = \exp(z)$$



演習問題

12.4 e^z が実数になる z を全て求めよ. また, e^z が純虚数になる z を全て求めよ.

[= [sy], p.62, 問 21 ◎]

12.5 次の複素数の実部, 虚部, 絶対値, 偏角主値を求めよ.

[= [sy], p.72, 章末問題 3(1) 改題]

(1) $e^{3-\frac{5}{2}\pi i}$.

(2) $e^{-1+\frac{1}{3}\pi i}$.

§ 13. 対数関数

ここでは、対数関数を発見的に定義していく。任意に与へられた $z \in \mathbb{C}$ について

$$(13.1) \quad z = e^w$$

を満たす w を現時点での数学的知識で求めてみる。いま極形式も使つて

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad w = u + i v$$

とおくと

$$\begin{aligned} r(\cos \theta + i \sin \theta) &= e^u(\cos v + i \sin v) \\ \therefore r = e^u, \quad \cos \theta &= \cos v, \quad \sin \theta = \sin v \end{aligned}$$

であり

$$u = \log v, \quad v = \theta + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

となる。特に z に対して (13.1) を満たす w は無数に存在する。

そこで次の様に定義する。

定義 13.2 $z \in \mathbb{C}$ について、 $\text{Arg } z$ を $z = |z|e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ となる θ として定め、これを z の 偏角主値 と呼ぶ。さらに

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$$

と定義し、 z の 対数主値 と呼ぶ。

例 13.3 対数主値の例を挙げておく。

- (1) $\text{Log } 3 = \log 3$. (右辺は実関数としての対数関数)
- (2) $\text{Log } (-3) = \log 3 + \pi i$.
- (3) $\text{Log } i = \frac{\pi i}{2}$.
- (4) $\text{Log } (1 + i) = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi i}{4}$.

ここで読者は $\text{Log } z$ の定義に人工的なものを感じられるであらう。実際 z が単位円周上を第 4 象限から第 1 象限へと動く際に、実軸上 (つまり $z = 1$ において、 $\text{Log } z$ は不連続である。しかし、 Arg の代りに、 z に対して

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

なる θ を $\text{Arg } z$ として定義すれば、上の不連続性は解消される。しかし今度は $z = -1$ において不連続性が生じる。いづれにしても、この様に無数の値が $z = e^w$ の解として得られるので、函数 $z \mapsto z = e^w$ の逆函数は 無限多価函数 である、などといはれる。

この不自然さ (人工的な定義) を解消するものとして考へられたのが Riemann 面 である。ある意味で定義域は函数自身が知つてゐるといふ考へ方であつて、これは進んだ数学においてはすでに定着した考へ方である。

($\log z$ の Riemann 面については ??? を見よ.)

以上を踏まへて,

$$(13.4) \quad \log z = \log |z| + i \arg z$$

と書くが, 各 $n \in \mathbb{Z}$ について $\arg z$ を

$$2n\pi \leq \arg z < (2n+1)\pi$$

とした場合の $\log z$ を対数函数の 第 n 分枝 と呼ぶことにする.

注意 13.5 次の様な理解はいかがであらうか.

↓	$f(z)$...	$\frac{1}{z^2}$	$\frac{1}{z}$		1	z	z^2	...
	$f'(z)$...	$-\frac{2}{z^3}$	$-\frac{1}{z^2}$	$\frac{1}{z}$	0	1	$2z$...
↑	$\int f(z)dz$...	$-\frac{1}{2z^2}$	$-\frac{1}{z}$	$\log z$	0	z	$\frac{1}{2}z^2$... (積分定数は省略)
	$f(z)$...	$\frac{1}{z^3}$	$\frac{1}{z^2}$	$\frac{1}{z}$	0	1	z	...

演習問題

13.6 次の複素対数の値を求めよ. [= [sy], p.66, 問 24 ◎]

- (1) $\log 3$.
- (2) $\log(-e)$.
- (3) $\log(1-i)$.

13.7 函数 $f(z) = \log |z| + i \arg z$ は $D = \{z; z \neq 0, -\pi < \arg z < \pi\}$ で正則であつて, $f'(z) = \frac{1}{z}$ であることを示せ. (Hint : 11.9 を利用.) [= [sy], p.66, 問 25 ◎]

13.8 $x > 0$ で定義された実数値対数函数 $\log x$ は上の Riemann 面のどの部分で定義されたものか述べよ. [= [sy], p.68, 問 26 ×]

13.9 次の値を求めよ. [= [sy], p.72, 章末問題 3(2) 他]

- (1) $\text{Log}(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$.
- (2) $\text{Log}(-2 + i2\sqrt{3})$.

13.10 Riemann 面について $w = z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}$ に対する Riemann 面を構成せよ. [= [sy], p.72, 章末問題 8]

§ 14. 複素三角関数, 双曲線関数

指数関数 e^z の定義から得られる

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

の辺々の和と差をとることで

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

を得る. これを元に次の定義をする.

定義 14.1 (複素) 三角関数を

$$(14.2) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

で定める. これらは全複素数平面において正則関数である.

証明 e^z が正則なので, 9.3 を使えばわかる. 14.8 も参照せよ. □

さらに次の定義する.

定義 14.3 (複素) 双曲線三角関数を

$$(14.4) \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

と定める. これらは全複素数平面において正則関数である.

証明 e^z が正則なので, 9.3 を使えばわかる. 14.8 も参照せよ. □

演習問題

14.5 次の函数 $f(z)$ について $F'(z) = f(z)$ となる $F(z)$ を求めよ.

[= [sy], p.64, 問 22 ◎]

- (1) $\sin az$ ($a \neq 0$).
- (2) $\cos(az + b)$ ($a \neq 0$).

14.6 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)$ の値を求めよ. [= [sy], p.64, 問 23 ◎]

14.7 次の方程式を解け. [= [sy], p.72, 章末問題 4]

- (1) $\sin z = 2$.
- (2) $\cos z = 2i$.

14.8 以下において $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) である. 次の等式が成り立つことを示し, これらの函数が複素数平面全体で正則であることを, 右辺についての Cauchy-Riemann の関係式 10.1 を示すことによつて確かめよ.

- (1) $\cos z = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$.
- (2) $\sin z = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$.
- (3) $\cosh z = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y - i \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y$.
- (4) $\sinh z = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y + i \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin y$.

§ 15. 一般の累乗

複素数の複素数による累乗を定義したい. 虚数の累乗を定義するため, 以下の考察をする. 0 でない $\alpha \in \mathbb{C}$ について,

$$e^z = \alpha$$

となる z は無数にあるが, それらは

$$z = \log \alpha$$

で与えられる. ゆえに, $\beta \in \mathbb{C}$ による累乗 α^β を, $(e^z)^\beta$ を想起して, 指数法則 がある程度成立する様に,

$$\alpha^\beta = e^{\beta z} = \exp(\beta z) = \exp(\beta \log \alpha)$$

と定めるのが自然である.

定義 15.1 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ に対して

$$\alpha^\beta = \exp(\beta \log \alpha) = \exp(\beta(\log |\alpha| + i \arg \alpha))$$

と定義する. 左辺は“ α の β 乗”と読む.

例 15.2 函数 $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ を考へる. これは $\exp(-\frac{1}{2} \log |z| + n\pi i) = |z|^{\frac{1}{2}} e^{n\pi i}$ ($n \in \mathbb{Z}$) と書けるが,

$$e^{n\pi i} = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}), \\ -1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となるので, 2 価函数である. この函数を \sqrt{z} の様に見えることがあるが, 通常, それは 2 価函数であることを意識してゐる. $z \geq 0$ のときの様に $\pm\sqrt{z}$ などと書くと混乱を招くであらう.

問 15.3 函数 $z^{\frac{1}{3}}$ を上の様に記述せよ.

例題 15.4 i^i を求めよ.

解答

$$\begin{aligned} i^i &= \exp(i(\log |i| + i \arg i)) = \exp(i(0 + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi))) \\ &= \exp(-\frac{\pi}{4} - 2n\pi) = e^{-\frac{\pi}{4} - 2n\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

となる. 無限個の実数であることに注意されたい. □

演習問題

15.5 $x > 0$ で定義された実数値関数 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ は上の Riemann 面のどの部分で定義されたものであるか. [= [sy], p.69, 問 27 ×]

15.6 次の値を求めよ. [= [sy], p.71, 問 28 ◎]

(1) $(-2)^i$.

(2) $(1+i)^i$.

(3) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$.

15.7 次の複素数の実部, 虚部, 絶対値, 偏角を求めよ.

[= [sy], p.72, 章末問題 3(4)(5) ◎]

(1) 3^{1+i} .

(2) i^{1+i} .

§ 16. 逆三角函数, 逆双曲線函数

命題 16.1

$$(16.2) \quad \begin{aligned} \cos^{-1} z &= -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \sin^{-1} z &= -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \tan^{-1} z &= \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right). \end{aligned}$$

定義 16.3

$$(16.4) \quad \begin{aligned} \text{Cos}^{-1} z &= -i \text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \text{Sin}^{-1} z &= -i \text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \text{Tan}^{-1} z &= \frac{1}{2i} \text{Log}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right). \end{aligned}$$

演習問題

16.5 上の (16.2) を証明せよ. [= [sy], p.71, 問 29 ◎]

16.6 次の複素数の実部, 虚部, 絶対値, 偏角を求めよ.

[= [sy], p.72, 章末問題 3(3) ◎]

(1) $\text{Tan}^{-1} 2i.$

(2) $\text{Cos}^{-1} 2i.$

第3章 複素積分と Cauchy の定理

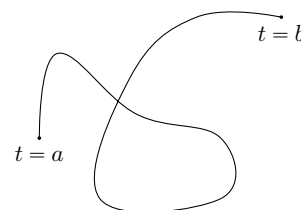
§ 17. 曲線

複素平面上の積分（線積分）について述べるために複素数平面上の曲線について説明する. また, 閉曲線の囲む領域（と 領域の境界をなす曲線）についても述べる.

定義 17.1 区間 $I = [a, b]$ から \mathbb{C} への連続な写像

$$(17.2) \quad C : I \ni t \mapsto z(t) = \varphi(t) + i\psi(t) \in \mathbb{C}$$

を 曲線 と呼ぶ. これは, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ の双方が連続といふことに他ならない. 曲線についての以下の様な概念を定義する.



- (1) 曲線に次の様に始点と終点を決めて 向き を付加したものを, 有向曲線 と呼ぶ. 例へば, 区間 $I = [a, b]$ で C の 始点 を, $z(a) = \varphi(a) + i\psi(a)$ で 終点 を $z(b) = \varphi(b) + i\psi(b)$ とする場合は

$$C : x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (t : a \rightarrow b),$$

などと記す. 向きは a, b の大小とは無関係である. 以降, 煩雑なので 曲線 はすべて 有向曲線 を意味するものとする.

- (2) 区間 (a, b) において, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ が微分可能で, かつ, 区間 $[a, b]$ において $\varphi'(t)$ と $\psi'(t)$ が連続であるとき (即ち $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は C^1 級るとき) 曲線 C は 滑らかな曲線 と呼ばれる.
- (3) (17.2) において, 写像 C が単射であるとき, 即ち

$$\varphi(t_1) + i\psi(t_1) = \varphi(t_2) + i\psi(t_2) \iff t_1 = t_2$$

が成り立つとき, C を 単純(な)曲線, , または, Jordan 曲線 と呼ぶ.

- (4) I が有限な区間 $I = [a, b]$ で, $t = a, b$ に対応する点が一致するとき, 即ち,

$$\varphi(a) + i\psi(a) = \varphi(b) + i\psi(b)$$

が成り立つとき C は 閉曲線 と呼ばれる.

- (5) 定義された区間内の有限個の点を除いて $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ がともに C^1 級である様な曲線を 区分的に滑らかな曲線 と呼ぶ.
- (6) 単純な閉曲線を Jordan 閉曲線 と呼ぶ.

約束 17.3 言葉を簡潔にするため、これ以降は、“曲線”といふ言葉はすべて、区分的に滑らかな曲線を指すものと仮定する。例へば、“Jordan 曲線”は、区分的に滑らかで単純な曲線のことを指す。

ここで上の定義について少し補足を述べる。曲線は、 \mathbb{C} の単なる部分集合ではなく、写像であつて、2 つの曲線の (写像としての) 像 が同じでも異なる曲線を表すことがある。さらにその向きも重要である。

区間 $[a, b]$ からの写像として定義された曲線

$$C : \varphi(t) + i\psi(t), \quad (t : a \rightarrow b),$$

と定数 $c \in \mathbb{R}$ について、 C の定義域を以下の様に変更する。

$$C' : [a+c, b+c] \ni t \mapsto \varphi(t-c) + i\psi(t-c)$$

この様な操作を C の定義域変更と呼ぶ。さらに、区間 $[a, b]$ からの写像として定義された閉曲線

$$C : \varphi(t) + i\psi(t), \quad (t : a \rightarrow b),$$

の定義域を以下の様にして \mathbb{R} 全体に延長する。即ち、各 $t \in \mathbb{R}$ を $t = t' + n(b-a)$, $t' \in [a, b]$, $n \in \mathbb{Z}$ なる t' が一意的に定まるから、

$$\varphi(t) + i\psi(t) = \varphi(t') + i\psi(t')$$

と定めるのである。 $a > b$ の場合も同様である。これにより $c \in \mathbb{R}$ が定数のとき、新しい定義域をもつた曲線

$$C_c : \varphi(t) + i\psi(t), \quad (t : a+c \rightarrow b+c),$$

が得られる。これを c だけ端点移動または端点変更した閉曲線と呼ぶことにする。閉曲線に限つては、上の様に定義域を \mathbb{R} に延長したときの

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(t), \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto \psi(t)$$

が共に C^1 級であるときに滑らかであると呼ぶことにする。

定義 17.4 曲線 C に対して、その始点と終点を入れ換へた曲線を逆向きの曲線と呼んで $-C$ で表す。また、いくつかの曲線 C_1, C_2, \dots, C_n が与へられてゐて、各 $j = 1, 2, \dots, n-1$ について、 C_j の終点と C_{j+1} の始点が一致してゐるとする。このとき、これらの曲線を (必要なら定義域変更して) 結んで新たな曲線が得られるが、それを

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

と記す。

次の定理は、自明に思われるが、厳密な証明は手間が掛かる。また種々の歴史がある。

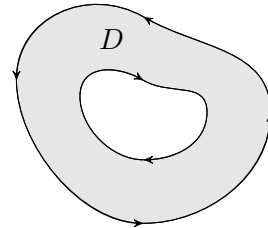
定理 17.5 (Jordan 閉曲線定理) C を複素数平面内の Jordan 閉曲線¹⁾ とせよ。 C の像の補集合は 2 つの互いに素な連結成分から成り、一方の成分は有界領域であり、内部 と呼ばれる。他方の成分は非有界領域となり、外部 と呼ばれる。また、 C は両成分 (領域) の境界を成す。

証明 この証明は述べない。また特段の興味がない場合は、これを認めて進めばよい。読み易い文献を挙げられないので、証明を知りたい読者は各自で調べられたい。 □

定義 17.6 以下の議論に必要な領域とその境界を定義する：

(1) Jordan 閉曲線 C の内部になつてゐる様な有界な領域 D について、 C の向きを、 D を左に見て進む方向づけ (向き) に (必要ならば) 修正したものを D の 境界 と呼び、 ∂D で表す。

(2) より一般的に、有限個の互いに交はらない Jordan 閉曲線の外部や内部の共通部分あるいは和集合をとる操作を、何回か繰り返へすことにより定義される領域 D についても、それらの境界を然るべく自然に定義する。その場合は ∂D は、必要に応じて向きの反転を施した、いくつかの Jordan 閉曲線の集りとして捉へられる。この場合の領域 D は、それらの Jordan 閉曲線群が 定める領域 あるいは、構成する領域 と呼ばれる。



2 つの滑らかで単純な有向曲線

$$(17.7) \quad \begin{aligned} C_1 : z_1(t) &= \varphi_1(t) + i\psi_1(t) \quad (t : a \rightarrow b) \\ C_2 : z_2(s) &= \varphi_2(s) + i\psi_2(s) \quad (s : c \rightarrow d) \end{aligned}$$

があつて、これらの端点、向き、像が一致すると仮定するとする。つまり

$$\begin{aligned} (\varphi_1(a), \psi_1(a)) &= (\varphi_2(c), \psi_2(c)), \quad (\varphi_1(b), \psi_1(b)) = (\varphi_2(d), \psi_2(d)), \\ \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) \mid a \leq t \leq b\} &= \{(\varphi_2(s), \psi_2(s)) \mid c \leq s \leq d\} \quad (\text{集合として}) \end{aligned}$$

とする。この様な C_1 と C_2 は互いに 同値 であると称することにする。さらに C_1 と C_2 がともに閉曲線であるとき、一方を端点移動したとき、これらの端点、向き、像が一致する場合、つまりある $k \in \mathbb{R}$ があつて

$$\begin{aligned} (\varphi_1(a+k), \psi_1(a+k)) &= (\varphi_2(c), \psi_2(c)), \quad (\varphi_1(b+k), \psi_1(b+k)) = (\varphi_2(d), \psi_2(d)), \\ \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) \mid a \leq t \leq b\} &= \{(\varphi_2(s), \psi_2(s)) \mid c \leq s \leq d\} \quad (\text{集合として}) \end{aligned}$$

となる場合、 C_1 と C_2 は互いに 同値 であると称することにする。

¹⁾ この定理においては「区分的に滑らか」といふ仮定は不要である。(17.3 参照)

以上のことを区分的に滑らかな単純曲線などにも拡張する。それをここで述べても退屈であるし、読者にできることなので、省略する。さらに長さを持つ曲線といふものを定義しておく。これにより以降の定理をかなり一般的に述べることができる。

定義 17.8 (長さを持つ曲線) $I = [a, b]$ で定義された曲線 $C: z(t) = x(t) + iy(t)$ について, I の分割 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ に対し, $|\Delta|$ で小区間の幅の最大値 $\max\{|t_{j+1} - t_j|; 1 \leq j \leq n\}$ を表すことにする。もし, この分割に関する和

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{j+1}) - x(t_j))^2 + (y(t_{j+1}) - y(t_j))^2} (t_{j+1} - t_j)$$

の $|\Delta| \rightarrow 0$ としたときの極限值が存在するならば C は 長さを持つ 曲線といはれ, その極限値を C の 長さ と呼んで

$$\text{length}(C) = \int_C |dz| = \int_a^b \left| \frac{dz}{dt} \right| dt$$

などと表はす。

注意 17.9 上の 17.8 の記号の下で, $x(t), y(t)$ がともに, 区間 $[a, b]$ で連続で, 区間 (a, b) で C^1 級 (つまり C が滑らか) であれば, C は長さを持ち,

$$\text{length}(C) = \int_C |dz| = \int_a^b \left| \frac{dz}{dt} \right| dt$$

である。一方 $x(t)$ と $y(t)$ がともに連続であるのに, 長さを持たない曲線 (Fractal 曲線など) が存在する。

§ 18. 複素積分

長さを有する曲線

$$C : [a, b] \ni t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

と区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n$$

と小区間 $[t_j, t_{j+1}]$ から任意に点 τ_j を選んだものを、区間 $[a, b]$ の 分割 data と呼び $(\Delta, \{\tau_j\})$ と書くことにする.

さて、区間 $[a, b]$ に対して与へられた分割 data $(\Delta, \{\tau_j\})$ と上の曲線 C 上で連続な函数 $f(z)$ に関する和

$$S(f, \Delta, \{\xi_j\}) = \sum_{j=0}^{n-1} f(z(\tau_j))(z(t_{j+1}) - z(t_j))$$

を考へる. 以下では、上の様な分割 Δ に対して、

$$|\Delta| = \max \{ |t_{j+1} - t_j|; 1 \leq j \leq n \}$$

と書いてゐる. この和について次が示せる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ が存在して、任意の 2 つの分割 data $(\Delta, \{\tau_j\})$, $(\Delta', \{\tau'_j\})$ について、

$$|\Delta| < \delta \text{ 且つ } |\Delta'| < \delta \implies |S(f, \Delta, \{\tau_j\}) - S(f, \Delta', \{\tau'_j\})| < \varepsilon$$

となる. このことから Cauchy 列が収束することを示すのと同様な方法で $|\Delta| \rightarrow 0$ のとき、和 $S(f, \Delta, \{\tau_j\})$ が収束することが証明される.

(詳しくは [sy], p.80, 定理 1 の証明などを参照されたい.)

定義 18.1 上の状況で、その極限を

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\tau_j\}) = \int_C f(z) dz$$

と表し、 $f(z)$ の C に沿つての 複素積分 と呼ぶ.

命題 18.2 (複素積分の実数函数積分による表示) 滑らかな曲線

$$C : [a, b] \ni t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

と C の像を含む集合上で定義された連続函数 $f(z)$ に対しての、 $f(z)$ の C に沿つてのについて

$$(18.3) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} (x'(t) + iy'(t)) dt$$

が成り立つ. [= [sy], p.81 (3.11); p.81, l.-8 の式]

(当面はこれを定義と思つても差し支へない.)

証明 上の状況で実函数 $t \mapsto z(t)$ は滑らかであるから、平均値の定理によつて、各 $j = 0, \dots, n$ について、 $\tau_j \in [t_j, t_{j+1}]$ が存在して

$$z(t_{j+1}) - z(t_j) = z'(\tau_j)(t_{j+1} - t_j)$$

となる. このとき, 和 $S(f, \Delta, \{\xi_j\})$ における ξ_j を $z(\tau_j)$ にとつて

$$\begin{aligned} S(f, \Delta, \{z(\tau_j)\}) &= \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(z_{j+1} - z_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f(z(\tau_j)) z'(\tau_j) (t_{j+1} - t_j) \end{aligned}$$

の $|\Delta| \rightarrow 0$ の極限も所望の積分に収束するから, あとは微分積分学で学んだ方法によつて主張の等式が得られる. \square

例題 18.4 次のそれぞれの場合に

$$\int_C (\operatorname{re}(z) + i(\operatorname{im} z)^2) dz$$

を計算せよ. [= [hk], p.46, 問 3.1 (1) (2) の類題]

(1) C は 1 から実軸に沿つて 0 に行き, 0 から虚軸に沿つて i に至る折れ線.

(2) $C : \cos t + i \sin t, (t : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2})$.

解答 (1) C は $z(t) = t, (t : 1 \rightarrow 0)$, $z(t) = it, (t : 0 \rightarrow 1)$ と書かれるから,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_1^0 t \, 1 \, dt + \int_0^1 i t^2 \, i \, dt = \int_1^0 t \, dt - \int_0^1 t^2 \, dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^0 - \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

(2) 線積分の定義に従つて,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + i \sin^2 t)(-\sin t + i \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-\sin^2 t \cos t - \cos t \sin t + i \cos^2 t - i \sin^3 t\} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-\sin^2 t \cos t - \cos t \sin t + \frac{i}{2}(1 + \cos 2t) - i \sin t(1 - \cos^2 t)\} \, dt \\ &= \left[-\frac{1}{3} \sin^3 t - \frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{i}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + i \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{5}{6} - \frac{2i}{3} + \frac{\pi i}{4} \end{aligned}$$

となる. \square

注意 18.5 18.1 から (18.3) の 積分の値は C の像のみに依存して決まる ゆゑ, 曲線 (閉曲線) C をそれと同値な滑らかな曲線 (滑らかな閉曲線) と取り換へても, 値は変はらない.

例題 18.6 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ のとき, 次を示せ.

(1) 線分 $C : z(t) = t + ic$ ($t : a \rightarrow b$) について,

$$\int_C dz = b - a \quad (= (b + ci) - (a + ci)), \quad \int_C z dz = \frac{1}{2}(b + ci)^2 - \frac{1}{2}(a + ci)^2.$$

(2) 線分 $C : z(t) = a + it$ ($t : c \rightarrow d$) について,

$$\int_C dz = (b - a)i \quad (= (a + di) - (a + ci)), \quad \int_C z dz = -\frac{1}{2}(a + di)^2 - \frac{1}{2}(a + ci)^2.$$

(3) 4 点 $a + ci, b + ci, b + di, a + di$ ($a < b, c < d$ とする) を頂点とする長方形 R の辺をこの順に廻つて元の $a + ci$ に戻る (長方形の周囲) 積分路 ∂R について

$$\int_{\partial R} dz = 0, \quad \int_{\partial R} z dz = 0.$$

解答 (1) については,

$$\begin{aligned} \int_C dz &= \int_a^b 1 \cdot 1 dt = [t]_a^b = b - a, \\ \int_C z dz &= \int_a^b (t + ic) dt = \int_a^b t dt + ic \int_a^b dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_a^b + ic [t]_a^b \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + ic(b - a) = \frac{1}{2}(b + ci)^2 - \frac{1}{2}(a + ci)^2. \end{aligned}$$

(2) については,

$$\begin{aligned} \int_C dz &= \int_c^d 1 \cdot i dt = [t]_c^d = (d - c)i, \\ \int_C z dz &= \int_c^d (a + it) \cdot i dt = ai \int_c^d dt + \int_c^d it \cdot i dt = ai [t]_c^d - \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_c^d \\ &= ia(d - c) - \frac{1}{2}(d^2 - c^2) = -\frac{1}{2}(a + di)^2 - \frac{1}{2}(a + ci)^2. \end{aligned}$$

(3) については (1) と (2) を使つて,

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} dz &= (b - a) + i(d - c) - (b - a) - i(d - c) = 0. \\ \int_{\partial R} z dz &= \left(\frac{1}{2}(b + ci)^2 - \frac{1}{2}(a + ci)^2 \right) + \left(\frac{1}{2}(b + di)^2 - \frac{1}{2}(b + ci)^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(a + di)^2 - \frac{1}{2}(b + di)^2 \right) + \left(\frac{1}{2}(a + ci)^2 - \frac{1}{2}(a + di)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

となる. □

問 18.7 上の 18.6(1), (2) を複素線積分の定義 18.1 に従つて計算し, その結果が上の計算と一致することを確認せよ.

注意 18.8 他に弧長に関する積分といふものがある。これも微分積分学で学んだ方法で、([A], 4.1.3, 4.1.2)

$$\int_C f(z) |dz| = \int_C f(z) ds = \lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(z(t_k)) \cdot |z(t_k) - z(t_{k-1})|.$$

と定義する。但し、 $C: z(t) (t: a \rightarrow b)$ は長さを持つ曲線であつて、 $f(z)$ は C の像を含む集合で連続であるとする。この積分は、

$$\int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt = \int_a^b f(z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

と一致することが容易に示される。

例題 18.9

$$\int_{|z|=2} |z^2| |dz|$$

を求めよ。

解答 円 $|z|=2$ は $z(t) = 2(\cos t + i \sin t) (t: 0 \rightarrow 2\pi)$ と見れば、始点 $z(0) = 1$ から $z(t)$ までの道のり s は $2t$ であるから、 $\frac{ds}{dt} = 2$ であり、

$$\int_{|z|=2} |z^2| |dz| = \int_0^{2\pi} 4 \cdot 2 dt = 16\pi$$

である。 □

問 18.10 次の積分を計算せよ。 [= [hk], p.46, 問 3.2 (1) (2)] (済)

(1) $\int_C (z+2) dz \quad C: z = t^2 + 2it \quad (t: 0 \rightarrow 1)$

(2) $\int_C z^2 dz \quad C: z = 2t + it \quad (t: 1 \rightarrow 2)$

問 18.11 曲線 $C: |z|=1$ (但し反時計廻り) について

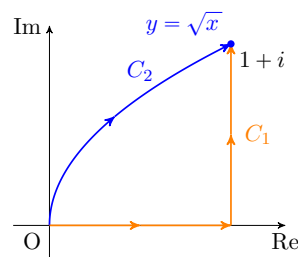
$$\int_C \bar{z} dz, \quad \int_C (z-3) dz, \quad \int_C (z-2) |dz|$$

を求めよ。 [= [hk], p.47, 問 3.3] (済)

問 18.12 0 から $1+i$ に至る図の様な曲線 C_1 と C_2 のそれぞれに沿つて $f(z)$ を積分せよ。 [= [sy], p.87, 問 2]

(1) $f(z) = \bar{z}$.

(2) $f(z) = z^2$.



命題 18.13 (複素積分の基本性質)

以下では曲線 C, C_1, C_2 はある領域 D 内に存在し, いずれも長さを持つとする.
また $f(z), f_1(z), f_2(z)$ は積分路の曲線上で連続であるとする. 次が成り立つ.

(1) Scalar 倍 : $\int_C cf(z) dz = c \int_C f(z) dz.$

(2) 和との交換 : $\int_C (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_C f_1(z) dz + \int_C f_2(z) dz.$

(3) 曲線の和 : $\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$

(4) 不等式 : $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in C} |f(z)| \cdot |C|.$

ここに $|C|$ は C の長さ (道のり) を表す.

証明 いずれも, 積分を定義した分割に関する和を調べることで証明される.

(詳細は省略)

□

命題 18.14 $r > 0$ を定数, $a \in \mathbb{C}$ を定点, $n \in \mathbb{Z}$ とする. 次が成り立つ:

$$\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1 \text{ のとき}), \\ 2\pi i & (n = -1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

以降では, この記法では, 円 $|z-a|=r$ を反時計廻りに周る積分を表すものとする.

証明 円 $|z-a|=r$ を

$$z(t) = a + r e^{it}, \quad t: 0 \rightarrow 2\pi$$

と記す. このとき (18.3) によつて

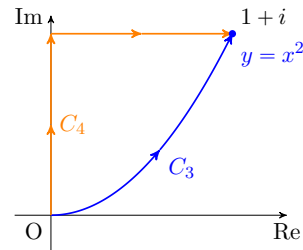
$$\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \begin{cases} ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ = ir^{n+1} \left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} \\ = \frac{r^{n+1}}{n+1} (1-1) = 0 & (n \neq -1 \text{ のとき}) \\ i \int_0^{2\pi} 1 dt = i [t]_0^{2\pi} = 2\pi i & (n = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. □

演習問題

18.15 0 から $1+i$ に至る 2 つの路 C_3, C_4 について次を計算せよ: [= [sy], p.92, 問 4 類題 ◎]

$$\int_{C_i} z^2 dz.$$



18.16 次の (1), (2) の場合に C を適当に表現して, 積分を定義にならつて計算せよ.

$$\int_C z^2 dz.$$

- (1) C は $-1-i, 1-i, 1+i, -1+i$ をこの順に廻り一周する正方形.
 (2) C は原点を中心とした半径 2 の円 (反時計周り). [= [sy], p.85, 問 1 ◎]

18.17 曲線 C は原点を中心とする半径 r の円とする. このとき

$$\int_C z^2 dz, \quad \int_C \frac{1}{z} dz, \quad \int_C \frac{1}{z^3} dz$$

の値を 18.14 を使わないで直接計算で求めよ.

18.18 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 次の積分を計算せよ: [= [hk], p.72, 7(1)]

$$\int_{|z|=1} \bar{z}^n dz.$$

§ 19. Cauchy-Riemann の関係式から Cauchy の定理へ

Cauchy-Riemann の関係式から, 次節で説明する Cauchy の定理が構想されることをこの節で述べておく. 精密な議論は次節以降で述べる

\mathbb{R}^2 内の領域 D で定義された 2 つの連続函数

$$(x, y) \mapsto p(x, y), \quad (x, y) \mapsto q(x, y)$$

と D 内の曲線 C について線積分

$$\int_C p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

を考へる. もちろん C を取り換へると, この積分の値は変化する. ここで, まづ以下のことに注意しやう.

補題 19.1 上の記号の下で, 函数 $p(x, y)$ と $q(x, y)$ を固定する. D 内の 2 曲線 C_1 と C_2 が同一の始点と同一の終点を持つときはいつでも

$$(19.2) \quad \int_{C_1} = \int_{C_2}$$

となるとする. このとき D 内の任意の閉曲線 C について

$$\int_C = 0$$

である. この逆も成り立つ.

証明 C は閉曲線だから, これの向きを逆にした曲線 $-C$ も C と同一の始点と同一の終点を持つので, (19.2) と線積分の性質により

$$\int_C = \int_{-C} = -\int_C.$$

よつて

$$\int_C = 0$$

が示された.

逆に同一の始点と同一の終点を持つ D 内の 2 曲線 C_1 と C_2 について, $C_1 - C_2$ が閉曲線になることに注意すれば, 仮定より

$$\int_{C_1 - C_2} = 0$$

ゆゑ 18.13(3) により

$$\int_{C_1} = \int_{C_2}$$

を得る. □

ここで 2 変数関数について C^1 級 の概念の定義を思ひ出しておく.

定義 19.3 開集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(x, y)$ が,

- (1) $g(x, y)$ は D で至るところ (x, y) の双方で) 偏微分微分可能, かつ,
 - (2) $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ はともに D で連続
- であるとき, $g(x, y)$ は D 上で C^1 級であるといはれる.

次の補題は微分積分で学んだことであるが, 再度, 証明込みで思ひ出しておく.

補題 19.4 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を定義域とする関数 $u = g(x, y)$ について, u_{xy} と u_{yx} が存在して, どちらも D において連続であれば $u_{xy} = u_{yx}$ が成り立つ.

証明 1 点 $(x, y) = (a, b) \in D$ において

$$g_{xy}(a, b) = g_{yx}(a, b)$$

を証明する. 十分小さい絶対値をもつ実数 h, k に対して²⁾

$$\Delta = g(a+h, b+k) - g(a, b+k) - g(a+h, b) + g(a, b)$$

とおき, これを 2 通りに計算する. そのために

$$\varphi(x) = g(x, b+k) - g(x, b),$$

$$\psi(y) = g(a+h, y) - g(a, y)$$

とおくと, 仮定より $\varphi(x)$ は微分可能で

$$\Delta = \varphi(a+h) - \varphi(a)$$

であるから, 平均値の定理により

$$\Delta = h\varphi'(a + \theta_1 h), \quad 0 < \theta_1 < 1$$

と書ける. さらに

$$\varphi'(a + \theta_1 h) = g_x(a + \theta_1 h, b+k) - g_x(a + \theta_1 h, b)$$

であるから, 再び平均値の定理から

$$\varphi'(a + \theta_1 h) = kg_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k), \quad 0 < \theta_2 < 1$$

と書ける. ゆえに

$$\Delta = hkg_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k)$$

となる. $\psi(y)$ についても同様の推論で次の表示を得る:

$$\Delta = hkg_{yx}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k), \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1.$$

²⁾ 2 点 (a, b) と $(a+h, b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれる程度に小さいとする.

従つて

$$g_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) = g_{yx}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k).$$

ここで $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ とすれば, $g_{xy}(x, y)$ と $g_{yx}(x, y)$ の連続性より,

$$g_{xy}(a, b) = g_{yx}(a, b)$$

を得る. □

さらに Green の定理 も思ひ出しておきたい.

定理 19.5 (Green の定理) D が有界な閉領域で, その境界 ∂D は, いくつかの滑らかな Jordan 閉曲線 C_1, \dots, C_n で構成されてみるとせよ. $P(x, y)$ と $Q(x, y)$ は領域 D を含む開領域で定義された C^1 級の 2 変数関数とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

この定理の証明は, 必要に応じて微分積分の教科書を参照されたい. さて, この節では次の定理が鍵となる.

定理 19.6 \mathbb{R}^2 内の単連結領域 D で定義された 2 つの C^1 級関数

$$(x, y) \mapsto p(x, y), \quad (x, y) \mapsto q(x, y)$$

を固定する. 領域 D 内の任意の曲線 C に対して, C 上で定義された線積分

$$(19.7) \quad \int_C p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

を対応させる. これについて, 次の 3 つは同値である.

- (1) (19.7) の値が, 任意の C について, その端点のみで決まる.
- (2) 次の 2 つの等式を同時に満たす様な D 上の関数 $U(x, y)$ が存在する:

$$(19.8) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = q.$$

- (3) 次の 2 つの等式の双方が成り立つ:

$$(19.9) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

さらに, これらが成立するとき (2) の U は定数の差を除いて一意的に定まる.

証明 (1) \implies (2). 1 点 $(a, b) \in D$ を固定する. 任意の点 $(x, y) \in D$ について,

$$U(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

と定義する. 仮定よりこれは (x, y) にのみ依存し C の経路に依存しない. (x, y) の近

傍に $(x+h, y)$ をとつて, (x, y) とを結ぶ x 軸に平行な線分を積分させれば,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = p(x, y)$$

がわかる. 同様に (x, y) と $(x, y+k)$ を結ぶ y 軸に平行な線分を積分させれば,

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = q(x, y)$$

である. この様な U と同じ性質をもつ U_1 が存在すれば

$$\frac{\partial(U-U_1)}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial(U-U_1)}{\partial y}(x, y) = 0$$

ゆゑ $(U-U_1)(x, y)$ は x にも y にも依存しない. つまり定数である.

(2) \implies (3). これは 19.8 の 2 式をそれぞれ y と x で偏微分してみれば 19.4 からわかる. ここまでは D が単連結であることを使用してゐない.

(3) \implies (1). 19.2 により, 任意の Jordan 閉曲線 C について

$$\int_C p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

を示せばよい. これは 17.5 にもとづいて 19.5 の D を C が囲む領域として適用すれば, 右辺は 0 である. $\partial D = C$ ゆゑ, これで上の式が示された. \square

例 19.10 C を (a, b) から (c, d) に至る曲線とするとき, 線積分

$$\int_C (5x^4 + 3x^2y^2)dx + (2x^3y + 2y)dy$$

について

$$\frac{\partial}{\partial y}(5x^4 + 3x^2y^2) = 6x^2y, \quad \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + 2y) = 6x^2y$$

となるが, この 2 つは等しい. この場合

$$U(x, y) = x^5 + x^3y^2 + y^2$$

とおくと, 実際に

$$\int_C (5x^4 + 3x^2y^2)dx + (2x^3y + 2y)dy = \int_C \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

となつてゐるので,

$$= \left[x^5 + x^3y^2 + y^2 \right]_{(a,b)}^{(c,d)}.$$

例 19.11 一方, 積分

$$\int_C (3x^2 + 2xy)dx + (x^2 + x + 4y^3)dy$$

については,

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + x + 4y^3) = 2x + 1$$

なので, この積分は C の始点と終点だけでは決まらない.

例 19.12 また, 積分

$$\int_C (xe^{xy} + \sin(x-y))dx + (ye^{xy} - \sin(x-y))dy$$

について, $U(x, y) = e^{xy} + \cos(x-y)$ ととれることを確かめられたい.

注意 19.13 いま, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ についての複素線積分

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) \\ &= \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy \end{aligned}$$

を考へる. $f(z)$ が単連結領域 D 上の至るところで正則であれば, $f'(z)$ も正則であることが示され (24.1 参照), それゆゑ u, v はともに C^1 級であつて, 後の 20.4 で示される通り, 積分の値は C の端点のみで定まるから, 最後の式の第 1 項と第 2 項のそれぞれについて (19.9) により

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

を得る. これは Cauchy-Riemann の関係式に他ならない. つまり, Cauchy-Riemann の関係式は線積分が積分路の端点に依らないことを言ひ換へになつてゐる. 一方で, 以上のことから, この議論を隙のない様にするためには, $f'(z)$ の連続性を用いなくて, 上の議論をしなくてはならないこともわかつた.

§ 20. Cauchy の積分定理

まず, 次の例に注意する.

例 20.1 18.12 と 18.15 で計算した通り右図の様な 4 本の曲線 C_1, C_2, C_3, C_4 のそれぞれに沿つての積分

$$\int_{C_j} z^2 dz \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

は同一の値を持つ. 即ち,

$$\int_{C_i} z^2 dz = \int_{C_j} z^2 dz$$

であるから

$$\int_{C_i - C_j} z^2 dz = 0$$

となる. このとき $C_i - C_j$ は閉曲線になつてゐる. (18.16 も参照されたい.)

この様な計算から次のことが成り立つことが感じられるであらう.

定理 20.2 (Cauchy の積分定理) D が有界な領域で, その境界 ∂D は, いくつかの滑かな Jordan 閉曲線 C_1, \dots, C_n で構成されてゐるとせよ. $f(z)$ が領域 D とその境界 ∂D を合はせた集合を含む集合 E で正則なら

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

が成り立つ. [= [sy], p.90 の定理 3]

証明の前に, 再度 $f'(z)$ の連続性を仮定して Green の定理を利用した証明と, この定理の使用例を述べておく.

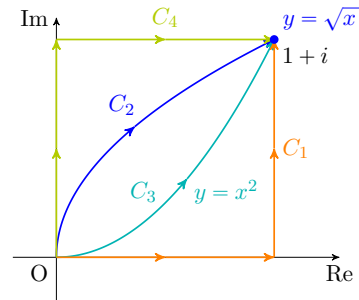
証明 (20.2 の証明 1) 定義に沿つて計算すれば,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(z) dz &= \int_{\partial D} (u + iv)(dx + i dy) \\ &= \int_{\partial D} u dx - v dy + i \int_{\partial D} v dx + u dy \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

ここで Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

により 2 つの項はどちらも 0 となるので, 所望の結論を得る. \square



例題 20.3 曲線 $C_0: |z| = 3$, $C_1: |z - i| = 1$, $C_2: |z + i| = 1$ (いずれも時計廻り) について

$$\int_{C_i} \frac{dz}{z^2 + 1} \quad (i = 0, 1, 2)$$

の値を求めよ. [= [hk], p.54, 例題 3.4] [= [sy], p.105, 問 7]

解答 始めに次のことに注意する:

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right).$$

この右辺の各項は $C_0 - C_1 - C_2$ で囲まれる領域で正則であるから Cauchy の積分定理から

$$\int_{C_0 - C_1 - C_2} \frac{dz}{z^2 + 1} = 0$$

である. 同様に Cauchy の積分定理 (または 18.14) により

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z - i} = 0, \quad \int_{C_1} \frac{dz}{z + i} = 0.$$

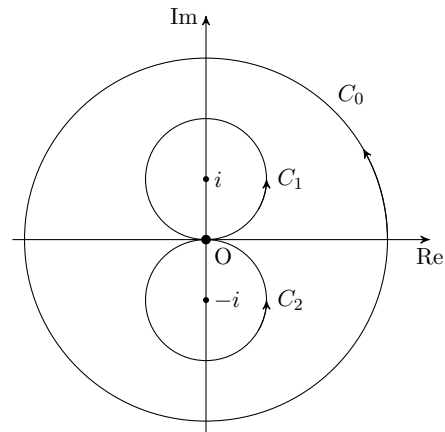
一方 18.14 により

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z - i} = 2\pi i, \quad \int_{C_2} \frac{dz}{z + i} = 2\pi i.$$

以上から

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{dz}{z^2 + 1} &= \frac{1}{2i} \left(\int_{C_1} \frac{dz}{z - i} - \int_{C_1} \frac{dz}{z + i} \right) = \pi - 0 = \pi, \\ \int_{C_2} \frac{dz}{z^2 + 1} &= \frac{1}{2i} \left(\int_{C_2} \frac{dz}{z - i} - \int_{C_2} \frac{dz}{z + i} \right) = 0 - \pi = -\pi, \\ \int_{C_0} \frac{dz}{z^2 + 1} &= \int_{C_1} \frac{dz}{z^2 + 1} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi - \pi = 0. \end{aligned}$$

これですべて求められた. □



20.2 のもう一つの証明は Goursat によるものであり, $f'(z)$ の連続性を仮定を必要としない. そのために 20.4, 20.8, 20.11 を用意する. 最終的にこの節の最後で証明が終はる.

定理 20.4 $f(z)$ が領域 E において原始函数 $F(z)$ をもつとき, E 内の曲線 $C : z = z(t)$ ($t : a \rightarrow b$) に対して

$$\int_C f(z) dz = \left[F(z) \right]_{z(a)}^{z(b)} = F(z(b)) - F(z(a))$$

となる. 特に, 積分の値は C の経路に無関係で端点 $z(a), z(b)$ のみで決まる. また C が閉曲線のとき $z(a) = z(b)$ であるから

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

証明 $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ ($z = x + iy$), $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) と書くことにすると,

$$\begin{aligned} F(z(t)) &= U(x(t), y(t)) + iV(x(t), y(t)) \\ \frac{dF(z(t))}{dt} &= \frac{dU(x(t), y(t))}{dt} + i \frac{dV(x(t), y(t))}{dt} \\ &= \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right\} \\ &\quad + i \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

$F(z)$ の正則性から Cauchy-Riemann の関係式 (10.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) &= -\frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t)), \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) &= \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \frac{dF(z(t))}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t)) \{x'(t) + iy'(t)\} + i \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \{x'(t) + iy'(t)\} \\ &= F'(z) z'(t) = f(z(t)) z'(t) \quad (a \leq t \leq b). \end{aligned}$$

よつて (9.6) から

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b \frac{dF(z(t))}{dt} dt \\ &= \left[F(z(t)) \right]_a^b = F(z(b)) - F(z(a)) = \left[F(z) \right]_{z(a)}^{z(b)} \end{aligned}$$

を得る. □

例題 20.5 曲線 $C : t + it^2$ ($t : 0 \rightarrow 1$) に沿つての積分

$$\int_C z^2 dz$$

を求めよ.

証明 方法 1. 線積分の定義に従つて計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t + it^2)^2 (1 + 2it) dt &= \int_0^1 \{(t^2 - 5t^4) + (4t^3 - 2t^5)i\} dt \\ &= \left[\left(\frac{1}{3}t^3 - t^5 \right) + i \left(t^4 - \frac{2}{6}t^6 \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{-2 + 2i}{3}. \end{aligned}$$

方法 2. しかるに z^2 は原始函数 $\frac{1}{3}z^3$ を持つので

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{1}{3}z^3 \right]_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{-2+2i}{3}$$

と計算した方が早い. 実際, 結果は同じになる. □

注意 20.6 単連結でないとダメな例.

問 20.7 次の積分の値を 2 通りに求めよ.

(1) $\int_0^{\frac{\pi i}{2}} \sin z dz.$

- (ア) 0 から虚軸に沿つて $\frac{\pi i}{2}$ に至る線分に沿つての積分で.
- (イ) 被積分函数が原始函数を持つことを利用して.

(2) $\int_0^{1+\frac{\pi i}{2}} e^z dz.$

- (ア) 0 から実軸に沿つて 1 に至り,
そこから虚軸に平行に $\frac{\pi i}{2}$ に至る折れ線に沿つての積分で.
- (イ) 被積分函数が原始函数を持つことを利用して.

補題 20.8 領域 E 上で正則な函数 $f(z)$ と, E に含まれ, 座標軸に平行な辺からなる長方形 R (辺と内部の合併) に対して,

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

証明 この証明の中で, 一般に長方形など Q の周 ∂Q に沿ふ積分の値を

$$\eta(Q) = \int_{\partial Q} f(z) dz$$

と記すことにする.

Step 1. 与へられた R の向ひ合ふ各辺の中点を結んでできる 4 つの小長方形を $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, $R^{(4)}$ とする. 全て辺と内部の合併とする. このとき

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)})$$

であるから, ある $1 \leq k \leq 4$ について

$$|\eta(R)| \leq 4 |\eta(R^{(k)})|.$$

ここで $R = R_0$, $R^{(k)} = R_1$ と記す. つまり

$$|\eta(R_0)| \leq 4 |\eta(R_1)|.$$

R_0 に対して行なつたこの操作を R_1 に行へば

$$|\eta(R_1)| \leq 4 |\eta(R_2)|$$

なる小長方形 R_2 が得られる. これを繰り返して, 次の様な長方形の列ができる:

$$(20.9) \quad R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots, \quad |\eta(R_0)| \leq 4^n |\eta(R_n)|.$$

すべての R_n に含まれる点は 1 つだけであるので, それを z^* と記す: $\bigcap_{n=0}^{\infty} R_n = \{z^*\}$.

Step 2. $f(z)$ は z^* において正則なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して $z \in U_\delta(z^*)$ ならば

$$f(z) = f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*) + \varepsilon(z; z^*)(z - z^*), \quad |\varepsilon(z; z^*)| < \varepsilon$$

となつてゐる. 十分大きい n については $R_n \subset U_\delta(z^*)$ となるから

$$\begin{aligned} \eta(R_n) &= \int_{\partial R_n} f(z) dz = \int_{\partial R_n} \{f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*) + \varepsilon(z; z^*)(z - z^*)\} dz \\ &= \{f(z^*) - f'(z^*)z^*\} \int_{\partial R_n} dz + f'(z^*) \int_{\partial R_n} z dz + \int_{\partial R_n} \varepsilon(z; z^*)(z - z^*) dz. \end{aligned}$$

ここで 18.6 (あるいは Green の定理を使つた証明) より $\int_{\partial R_n} dz = 0$, $\int_{\partial R_n} z dz = 0$ である. いま, R の対角線の長さを d とすれば R_n の対角線の長さは $\frac{1}{2^n}d$ で, ∂R_n の周長は $\frac{4}{2^n}d$ より小さい. ここで, $z \in \partial R_n$ ならば $|z - z^*| \leq \frac{1}{2^n}d$ で, (20.9) の不等式も

合はせて考慮することにより,

$$\begin{aligned} |\eta(R_0)| &\leq 4^n |\eta(R_n)| = 4^n \left| \int_{\partial R_n} \varepsilon(z; z^*) (z - z^*) dz \right| \\ &\leq 4^n \int_{\partial R_n} |\varepsilon(z; z^*)| |z - z^*| |dz| < 4^n \times \varepsilon \frac{d}{2^n} \times \frac{4d}{2^n} = 4\varepsilon d^2. \end{aligned}$$

ここで ε は任意であるから $\eta(R_0) = 0$ でなければならない。 □

定義 20.10 実軸に平行な線分または虚軸に平行な線分のみをいくつか繋いだ曲線を 特殊折れ線 と呼び、4 つの辺がどれも実軸か虚軸に平行である長方形の内部を 特殊長方形 を呼ぶ。

定理 20.11 (原始函数の存在定理) 単連結領域上で **正則** な函数は原始函数を持つ。

証明 E を単連結領域とし $f(z)$ を E の **正則** 函数とせよ。

Step 1. $z_0 \in E$ を固定する. 各 $z \in E$ に対して z_0 から z までの積分を以下の様に構成する. z_0 と z を E 内の特殊折れ線 C で結ぶ. その様な C は E が領域だから存在する. そこで

$$(20.12) \quad F(z) = \int_C f(\zeta) d\zeta$$

により函数 $F(z)$ を定義する. この $F(z)$ は C の選び方に依らない. 実際, 上記の様な 2 つの特殊折れ線 C, C' について, $C - C'$ はいくつかの特殊長方形の周囲を合はせたものになっている. 但し, 方向はまちまちである. それらを $\partial R_1, \dots, \partial R_n$ と書くと

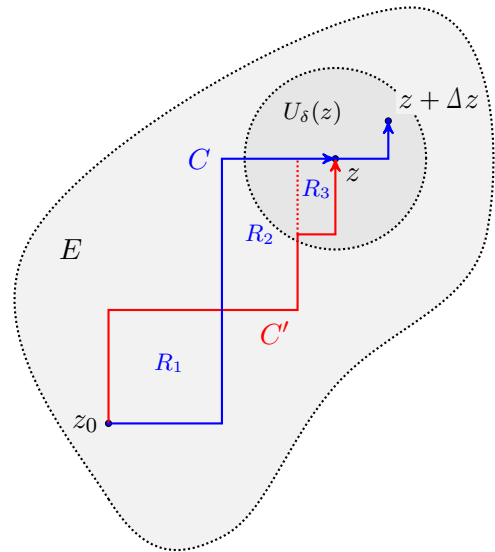
$$\begin{aligned} &\int_C f(\zeta) d\zeta - \int_{C'} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{C-C'} f(\zeta) d\zeta = \sum_i \int_{\partial R_i} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

となるが, 最後の和の各項は 20.8 によりすべて 0 である. 以上により (20.12) の定義は C の選び方に依らない.

Step 2. 次に上の (20.12) の定義の下で $F'(z) = f(z)$ となることを証明する. そのために E 内の 2 点 z_1, z_2 を結ぶ特殊折れ線の 1 つを $[z_1, z_2]$ と書く. $\Delta z \neq 0$ を $z + \Delta z \in E$ なる様に任意にとり, 特殊折れ線 $[z, z_0]$ と $[z, z + \Delta z]$ を用意し,

$$[z_0, z + \Delta z] = [z_0, z] + [z, z + \Delta z]$$

と書いておく.



このとき,

$$\begin{aligned}
 \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \frac{1}{\Delta z} \int_{[z, z + \Delta z]} f(\zeta) d\zeta - f(z) \\
 (20.13) \qquad \qquad \qquad &= \frac{1}{\Delta z} \int_{[z, z + \Delta z]} f(\zeta) d\zeta - \frac{f(z)}{\Delta z} \int_{[z, z + \Delta z]} 1 d\zeta \\
 &= \frac{1}{\Delta z} \int_{[z, z + \Delta z]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta.
 \end{aligned}$$

$\zeta = z$ で函数 $f(\zeta)$ は連続であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して

$$|\zeta - z| < \delta \text{ (つまり } \zeta \in U_\delta(z) \text{)} \implies |f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. いま $|\Delta z| < \delta$ とすると $[z, z + \Delta z] \subset U_\delta(z)$ としてよい. よつて $[z, z + \Delta z]$ 上のどの ζ に対しても $|f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ となつてゐる. また $[z, z + \Delta z]$ の長さ L は $L \leq 2|\Delta z|$. よつて 18.13 (4) より

$$\left| \frac{1}{\Delta z} \int_{[z, z + \Delta z]} \{f(\zeta) - f(z)\} d\zeta \right| \leq \frac{\varepsilon L}{2|\Delta z|} \leq \varepsilon.$$

このことは

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{[z, z + \Delta z]} \{f(\zeta) - f(z)\} d\zeta \right| = 0$$

を示してゐる. よつて (20.13) より

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = 0.$$

ゆゑに

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

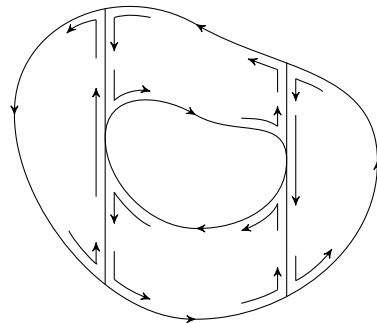
である. 即ち $F(z)$ は z で微分可能で $F'(z) = f(z)$ である. □

以上から Cauchy の定理 20.2 が次の様に示される.

証明 まづ D が単一連結だとする. この場合, 20.11 より $f(z)$ は D において原始函数 $F(z)$ を持つ. よつて 20.4 によつて

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

となる. D が一般の領域の場合は, それをいくつかの単連結領域の合併集合で表はすことができる. この場合, 2つの小領域の共通の境界のところでは積分が打ち消されるから, C をそれらの境界の和に置き代へても積分の値は変はらない. 従つて, やはり上の等式が成り立つ. □



演習問題

20.14 次の積分の値を求めよ. [= [sy], p.91, 問 3, 改題]

$$\int_{|z-2|=3} \frac{1}{e^z + 1} dz.$$

20.15 C を円 $|z| = 2$ に対して, 次の値を求めよ. [= [sy], p.96, 問 5 ◎]

(1) $\int_C \frac{1}{z^2 + 1} dz.$

(2) $\int_C \frac{1}{z^2 - 2z - 3} dz.$

(3) $\int_C \frac{1}{z^2 - 1} dz.$

(4) $\int_C \frac{z-1}{e^z} dz.$

(5) $\int_C \frac{1}{z(z+i)} dz.$

(6) $\int_C \frac{1}{z(z-3i)} dz.$

§ 21. 曲線の絡数, homology 同値, 単連結領域

定義 21.1 滑らかな閉曲線の組 C について, 各 $a \in \mathbb{C}$ に関する 絡数 を

$$n(C, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a}$$

で定める. 直観的には C が a の周りを反時計廻りに何周してゐるかを表してゐる. 時計廻りになつてゐると負の値になる.

補題 21.2

$$n(C, a) \in \mathbb{Z}, \quad n(-C, a) = -n(C, a).$$

定義 21.3 E を開集合とする. E 内の cycle C が, 任意の点 $a \in \mathbb{C} - E$ に対して

$$n(C, a) = 0$$

となるとき C は開集合 E に関して 0 に homology 同値 であるといはれる.

§ 22. Cauchy の定理の一般形

定理 22.1 (Cauchy の積分定理の一般形) $f(z)$ が開集合 E の至るところで正則であるとき, E に関して 0 に homology 同値な任意の cycle C について

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

注意 22.2 他にも Cauchy の定理の微妙な一般化が存在する. 例へば C を長さを持つ Jordan 閉曲線とし, $f(z)$ は C で囲まれた領域 D において正則で, D の閉包 \bar{D} において連続であるとする. このとき

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ. ([Y], 第 XII 章の最後)

§ 23. Cauchy の積分表示

ここでは Cauchy の積分表示 (Cauchy の積分公式) と呼ばれる次の公式を説明する.

定理 23.1 (Cauchy の積分表示) 領域 E に含まれる Jordan 閉曲線群 C が構成する領域 D が E に含まれてゐるとせよ. このとき E で正則な関数 $f(z)$ と $z \in D$ について, 次の式が成り立つ: [= [sy], p.102 の定理 8]

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

証明 2 つの段階に分けて証明する.

Step 1. $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ で C_1, \dots, C_n は Jordan 閉曲線であるとする. 領域は連結なのだから C_1, \dots, C_n のうちどれか 1 つが他のすべての C_j を囲んでゐる. そこで番号を付け代へて C_1 がそれ以外のすべての C_j を囲んでゐるとする. z を中心とする円 K (時計廻り) を C と交はらない様に, その半径を十分小さくとる. 函数

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

は領域 $D^* = D - \{z\}$ (z を除いた領域) で正則である. また C_1, \dots, C_n, K は D^* に含まれるある領域を囲んでゐる. ゆゑに 20.2 (Cauchy の積分定理) によつて

$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{-C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \cdots + \int_{-C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{-K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

ゆゑに

$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \cdots + \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{-K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

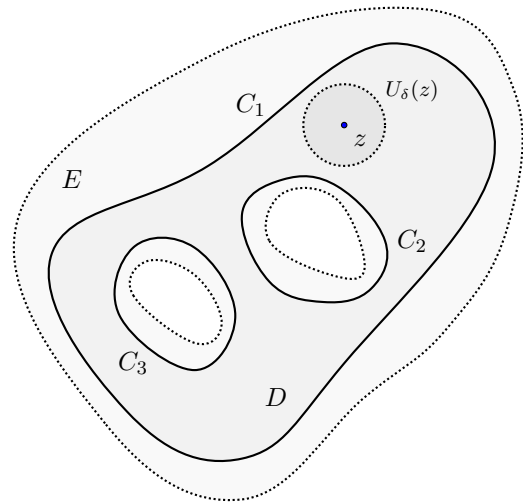
一方 18.14 により

$$\begin{aligned} \int_{-K} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta &= 2\pi i. \\ \therefore 2\pi i f(z) &= \int_{-K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

以上から

$$(23.2) \quad \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) = \int_{-K} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

が得られた.



Step 2. $f(\zeta)$ は $\zeta = z$ において正則なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し,

$$|\zeta - z| < \delta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ. ここで K の半径 r を δ より小さく取れば, $\zeta \in K$ については

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| < \frac{\varepsilon}{|\zeta - z|} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

ここで K の円周が $2\pi r$ であることに注意して, 18.13(4) を適用すれば

$$\left| \int_{-K} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

がわかる. よつて (23.2) から

$$\left| \int_{-K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| < 2\pi\varepsilon.$$

ε は任意なので

$$\int_{-K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) = 0$$

でなければならず, 所望の等式が示される. \square

注意 23.3 Cauchy の積分公式は非常に重要である. 左辺は C 上の函数値のみに依存してゐるにも拘らず, C から離れた点 z での函数値を与へる. 特に $f(\zeta)$ が C 上で 0 であるならば $f(z) = 0$ が従ふ. この事実始めて接する者は, 非常に不思議に感ずるのではなからうか. もちろんこれは $f(\zeta)$ の正則性の反映であり, たとへ $f(\zeta)$ が (実部と虚部の 2 変数函数として) 無限回微分可能函数であつても一般には成立しない内容である. 今後, 読者は正則函数の概念がいかに無限回微分可能函数のそれと異なるかを幾度となく感じる事となるであらう.

例題 23.4 次の積分の値を求めよ:

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2 - 4} dz.$$

解答 被積分函数を

$$\frac{e^z}{z^2 - 4} = \frac{e^z}{(z-2)(z+2)} = \frac{e^z}{z-2}$$

と書く. ここで $f(z) = \frac{e^z}{z+2}$ は積分路 $|z-3|=2$ の内部で正則であるから, Cauchy の積分公式を用ゐて

$$(\text{与式}) = \int_{|z-1|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta-2} d\zeta = 2\pi i f(2) = 2\pi i \frac{e^2}{4} = \frac{e^2 \pi i}{2}$$

を得る. \square

演習問題

23.5 (20.3 の別法) C が $i, -i$ を通らない Jordan 閉曲線であるとき, 積分

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$$

の値を, 被積分函数を

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z - i} \cdot \frac{1}{z + i}$$

として, Cauchy の積分公式を利用して求めよ.

23.6 次の積分の値を求めよ. [= [sy], p.112, 章末問題 2(1), (2) ◎]

(1) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz.$

(2) $\int_{|z|=2} \frac{1}{1 + z^2} dz.$

23.7 次の積分を求めよ.

(1) $\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz. \quad [= [hk], p.72, 6(1)]$

(2) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z(z-1)} dz. \quad [= [hk], p.72, 6(3)]$

(3) $\int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z(2z-1)} dz. \quad [= [hk], p.72, 6(8)]$

(4) $\int_{|z-i|=1} \frac{z e^z}{z^2 + 1} dz. \quad [= [hk], p.72, 6(9)]$

(5) $\int_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^3 + 1} dz. \quad [= [hk], p.72, 6(10)]$

§ 24. Cauchy の導函数積分公式

Cauchy の積分公式を一般化した次の公式も便利である.

定理 24.1 (Cauchy の導函数積分公式³⁾) 領域 E に含まれる Jordan 閉曲線群 C でそれが E に含まれるある領域 D を構成してゐるとする. このとき D で正則な関数 $f(z)$ と $z \in D$ について

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

が成り立つ. 特に, 正則な関数は何回でも微分可能である. [= [sy], p.102 の定理 8]

証明の前にこれを応用した計算をしてみる. 全く代数的な計算だけで結果が得られる.

例題 24.2 次の積分の値を求めよ:

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{(z-1)^3(z+2)} dz.$$

解答 分母 $(z-1)^3(z+2)$ が 0 になるのは $z=1, -2$ のときであるが 1 のみが積分路の内部 $|z-2| < 3$ に存在するから, この領域で正則な $f(z) = \frac{e^z}{z+2}$ に対し 24.1 を使ひ,

$$(\text{与式}) = \int_{|\zeta-2|=3} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-1)^3} d\zeta = \frac{2\pi i}{2!} f''(1).$$

ここで

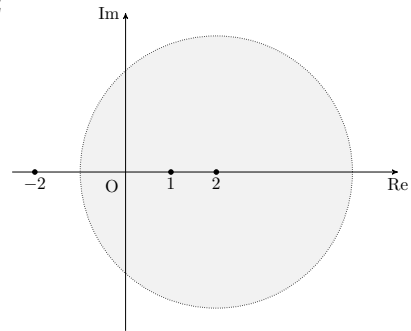
$$f'(z) = \frac{e^z(z+1)}{(z+2)^2}, \quad f''(z) = \frac{e^z(z^2+2z+2)}{(z+2)^3}$$

より

$$f''(1) = \frac{5e}{27}.$$

$$\therefore (\text{与式}) = \frac{2\pi i}{2!} \cdot f''(1) = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{5e}{27} = \frac{5\pi i}{27}$$

である. □



³⁾ これは Cauchy の発見したものである. 日本では Goursat の定理, あるいは, Goursat の公式 と呼ばれてゐるが, 他国では, この名称でない様なので, この講義録では使はないこととした.

さて, Cauchy の導函数積分公式の証明のために, 次の補題を用意する. これは [A], Chapter 4, §2.3 Lemma 3 に述べられてゐるものであるが, 他書には見当たらないし, よく工夫されてゐるので Ahlfors の補題と呼ぶことにしたい.

この補題はとても便利で, Laurent 展開定理などの証明においても活躍する.

補題 24.3 (Ahlfors の補題) 曲線⁴⁾ C 上の連続函数 $\zeta \mapsto \varphi(\zeta)$ と C 上にない任意の点 z , および, 整数 $n \geq 0$ に対して,

$$G_n(z) = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

とおく. 函数 $z \mapsto G_n(z)$ は C が定める各領域 (つまり $\mathbb{C} - C$) 上で正則であり,

$$(24.4) \quad G_n'(z) = (n+1)G_{n+1}(z)$$

を満たす. 従つて次の等式が成り立つ:

$$G_0^{(n)}(z) = n! \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

証明 一般に, 函数 $\psi(z)$ に対して記号

$$G_n(\psi; z) = \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (\text{関数 } \psi \text{ をいろいろ取り換える必要があるため})$$

を用意しておく. 元の $\varphi(\zeta)$ については $G_n(\varphi; z) = G_n(z)$ と略記する.

Step 1. $n = 0$ のときの証明. まづ $G_0(\psi; z)$ が連続であることを示さう. z_0 を C 上にない点とし, $r > 0$ を $U_r(z_0)$ が C と交はらない様にとる. 任意の $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ に対し, $\zeta \in C$ ならば $|\zeta - z| > \frac{r}{2}$ である. ゆゑに

$$\begin{aligned} |G_0(\psi; z) - G_0(\psi; z_0)| &= \left| (z - z_0) \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \right| \\ &< |z - z_0| \cdot \frac{2}{r^2} \int_C |\psi(\zeta)| |d\zeta| \end{aligned}$$

が得られる. ここで $z \rightarrow z_0$ とすれば右辺は 0 に近づくから, 左辺も 0 に近づくので, $G_0(\psi; z)$ は $z = z_0$ で連続である. さらに, 以上より $z \neq z_0$ かつ $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ のとき,

$$\frac{G_0(\psi; z) - G_0(\psi; z_0)}{z - z_0} = \int_C \frac{\psi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} = G_0\left(\zeta \mapsto \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z_0}; z\right)$$

であるから, 上の $G_0(\psi; z)$ についての結果を $G_0\left(\frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z_0}; z\right)$ に対して適用することにより, この式の右辺が $z = z_0$ で連続であることがわかる. それゆゑ $z \rightarrow z_0$ のとき左辺は $G_0'(\psi; z_0)$ に収束し, 中辺の $z = z_0$ における値は $G_1(\psi; z)$ であるので, $G_0'(\psi; z_0) = G_1(\psi; z_0)$ である. つまり $G_0'(\psi; z) = G_1(\psi; z)$ であり, $\psi(z) = \varphi(z)$ として $n = 0$ の場合の (24.4) が示された.

⁴⁾ 長さが有限であることは仮定してゐるが, 単純でなくてもよいし, 閉曲線でもなくてよい!

Step 2. 次に, $k-1$ 以下の n については定理 ($\varphi(z)$ を一般の $\psi(\zeta)$ としての) が正しいと仮定する. このとき

$$\begin{aligned} G_k(\psi; z+h) - G_k(\psi; z) &= \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}} d\zeta - \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta \\ &= \left\{ \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}} d\zeta - \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)^k(\zeta-z)} d\zeta \right\} \\ &\quad + \left\{ \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)^k(\zeta-z)} d\zeta - \int_C \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta \right\} \\ &= h \int_C \frac{\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)}}{(\zeta-z-h)^{k+1}} d\zeta + \left\{ \int_C \frac{\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)}}{(\zeta-z-h)^k} d\zeta - \int_C \frac{\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)}}{(\zeta-z)^k} d\zeta \right\} \\ &= h G_k\left(\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z+h\right) + \left\{ G_{k-1}\left(\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z+h\right) - G_{k-1}\left(\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right) \right\} \end{aligned}$$

ここで, $h \rightarrow 0$ のとき右辺は 0 に収束する. 実際, $|h|$ が十分小さければ, 第 1 項は, その被積分関数の絶対値が有界であるから, 0 に収束するし, 第 2 項内の $G_{k-1}\left(\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right)$ は, 帰納法の仮定より連続関数であるから, 第 2 項も 0 に収束するからである. さて, この式で $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta)$ として h で両辺を除すると,

$$\frac{G_k(z+h) - G_k(z)}{h} = G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z+h\right) + \frac{G_{k-1}\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z+h\right) - G_{k-1}\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right)}{h}.$$

ここで, 先に述べた通り $G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right)$ は連続であるから, $h \rightarrow 0$ のとき, 第 1 項 $G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z+h\right)$ は $G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right)$ に収束する. 帰納法の仮定から, $G_{k-1}\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right)$ は正則でその導関数は $k G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right)$ であるので, $h \rightarrow 0$ のとき, 上記の第 2 項は $k G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right)$ に収束する. よって

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G_k(z+h) - G_k(z)}{h} &= G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right) + k G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right) = (k+1) G_k\left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)}; z\right) \\ &= (k+1) \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}} d\zeta = (k+1) G_{k+1}(z) \end{aligned}$$

となつて $n = k$ のときも (24.4) が示されて, 証明が終る. \square

証明 (Cauchy の導関数積分公式 24.1 の証明) $n = 0$ の場合は 23.1 そのものであるから正しい. $n = k$ のとき正しいとすれば

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta.$$

Ahlfors の補題 24.3 により

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z) &= \frac{d}{dz} f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta \\ &= \frac{k!}{2\pi i} (k+1) \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}} d\zeta = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}} d\zeta \end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ のときも成り立つ. \square

演習問題

24.5 次の積分の値を求めよ. [= [sy], p.107, 問 9 〇]

$$(1) \int_{|z-1|=1} \frac{1}{(2z-1)^2(z+1)} dz. \quad (2) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz. \quad (3) \int_{|z-i|=3} \frac{\sin z}{(z-i)^3} dz.$$

24.6 次の積分の値を求めよ. [= [sy], p.112, 章末問題 2 (3), (4), (5) 〇]

$$(1) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=1} \frac{z e^{az}}{(z+1)^3} dz \quad (a \text{ は定数}). \quad (2) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z+1)(z-1)^n} dz.$$

$$(3) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz.$$

24.7 次の積分の値を求めよ. [= [hk], p.72, 6(2)~(8)]

$$(1) \int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2(z-2)}. \quad (3) \int_{|z+2|=2} \frac{2z^2+z-3}{(z+1)^3} dz. \quad (5) \int_{|z+1|=1} \frac{(z+1)^2 e^z}{(z-1)^2} dz.$$

$$(2) \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z(z+1)} dz. \quad (4) \int_{|z|=1} \frac{z^3+z+1}{z^4-3z^2} dz. \quad (6) \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z}{z^2(z^2+3)} dz.$$

$$(7) \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\cosh z}{z(2z-1)} dz.$$

24.8 滑らかな閉曲線群 C が $z=1$ を含む領域を (自然な向きに) 囲むとき, 次の積分の値を求めよ. [= [hk], p.72, 8(1)~(3)]

$$(1) \int_C \frac{(z+2)^2 e^z}{(z-1)^2} dz. \quad (2) \int_C \frac{e^z+2}{(z-1)^4} dz. \quad (3) \int_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz.$$

24.9 次の積分の値を求めよ. [= [sy], p.112, 章末問題 3]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3e^{i\theta}\right) d\theta.$$

(Hint: Cauchy の積分公式)

24.10 $R > 0$ を定数とする. $f(z)$ は $|z| \leq R$ を含む領域で正則とする. この領域内の任意の点 $z = r e^{i\theta}$ ($r < R$) に対して

$$f(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi$$

が成り立つことを証明せよ. [= [sy], p.112, 章末問題 4 △]

24.11 $n \in \mathbb{N}$ とする. 次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz. \quad (2) \int_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z-2)^n} dz.$$

[= [hk], p.72, 7(1) ~ (3) (これらの出題意図は? (1) は 18.18 へ移動 (3) は改題)]

§ 25. Cauchy の導函数積分公式の応用

ここでは Cauchy の導函数積分公式の応用を 4 つほど述べる.

定理 25.1 正則函数の導函数は正則である. したがって, 一般に任意の高次導函数も正則函数である.

証明 Cauchy の導函数積分公式 24.1 から直ちにわかる. □

次に述べる Morera の定理は Cauchy の定理 20.2 の逆が成り立つことを主張する.

定理 25.2 (Morera の定理) 領域 D で連続な函数 $f(z)$ について, D 内の任意の閉曲線 C に関して

$$(25.3) \quad \int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つとせよ. このとき $f(z)$ は D 上で正則である.

証明 定点 $z_0 \in D$ をとる. 任意の $z \in D$ に対し, z_0 から z に至る曲線 $C(z_0, z)$ についての積分

$$F(z) = \int_{C(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta$$

は, 仮定から $C(z_0, z)$ の選び方に依らない. さらに, 微小変化 Δz について, 20.11 の証明の様にして, D 内の特殊折れ線 $[z, z + \Delta z]$ を考へることで, $F(z)$ が z で微分可能で $F'(z) = f(z)$ であることがわかる. $z \in D$ は任意であるから, $F(z)$ は正則函数. 25.1 より $f(z)$ も正則である. □

定義 25.4 全複素数平面上で正則な函数を 整型函数 (entire function) と呼ぶ.

例 25.5 整式 $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, 指数函数 e^z , 三角函数 $\cos z, \sin z$ などは典型的な整型函数である. 一方 $\frac{1}{z^2+1}$ や $\tan z$ などは整型函数ではない.

定理 25.6 (Liouville の定理) 有界な整型函数は定数である.

証明 M を定数として, 整型函数 $f(z)$ について $|f(z)| < M$ ($z \in \mathbb{C}$) であるとせよ. 十分大きな定数 $R > 0$ をとると 24.1 により

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

よつて $f'(z) = 0$ でなくてはならず, $f(z)$ は定数である. □

注意 25.7 例として, 函数 $z \mapsto \sin z$ は z が実数であれば有界であるが, 複素数の範囲では有界でない. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であるから $z = -it$ ($t \in \mathbb{R}$) として $t \rightarrow \infty$ とすると $|\sin -it| \rightarrow \infty$ となり, 有界ではない. [= [sy], p.112, 章末問題 1]

定義 25.8 自然数 n および定数 a_0, a_1, \dots, a_n と未知数 z について, 方程式

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

を 代数方程式 と呼ぶ. もし $a_0 \neq 0$ なら, これを n 次代数方程式 と呼ぶ.

定理 25.9 (代数学の基本定理) 自然数 $n \geq 1$ について, n 次代数方程式は複素数の範囲に重複度も込めて丁度 n 個の解を持つ.

証明 $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n$ を定数とし, 始めに函数

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$$

が少なくとも 1 つの解を持つことを示さう. もし解がないとすれば $1/P(z)$ は整型函数である. しかるに

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n| \\ &= |z|^n \cdot |a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n-1}z^{-n+1} + a_nz^{-n}| \longrightarrow \infty \quad (|z| \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから $1/P(z)$ は全平面で有界である. 従つて Liouville の定理 25.6 より $P(z)$ は定数となつて矛盾する. それゆゑ $P(z) = 0$ は解を持たねばならない. その 1 つを α_1 とする. このとき

$$P(z) = (z - \alpha_1)(a_0z^{n-1} + b_1z^{n-2} + \dots + b_{n-1}z + b_n)$$

と書ける. ここで

$$P_1(z) = a_0z^{n-1} + b_1z^{n-2} + \dots + b_{n-1}z + b_n$$

に対し, $P(z)$ に対してのと同様の考察を行へば $P_1(z)$ が少なくとも 1 つの解 α_2 を持つことがわかる. これを繰り返へせば

$$P(z) = a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

なる因数分解が得られ, 結論に至る. □

注意 25.10 代数学の基本定理 25.9 は「代数学 5 および 6」で学ぶ言葉を使ふと, 複素数体 \mathbb{C} は 代数的閉体 である, と述べられる. 人類は, 数の概念を「より一般的な代数方程式を解きたいといふ動機」でもつて, 自然数の全体 \mathbb{N} から, 整数環 \mathbb{Z} , 有理数体 \mathbb{Q} , 実数体 \mathbb{R} , 複素数体 \mathbb{C} へと広げてきた. この「動機」はここで終焉を迎へたことになる. しかし, 数は別の方向へと広がりを見せてゐる.

代数学の基本定理 25.9 は Gauss が証明し, 学位論文としたものである. 彼はこの定理に 4 種類の証明を与へた. Gauss は平方剰余の相互法則といふものについても様々な証明を与へてゐるが, 彼のその様な姿勢は「理解することの凄まじさ」を我々に感じさせてくれる.

定理 25.11 (最大値の原理) 領域 D で正則な函数 $f(z)$ に対し $|f(z)|$ は D 内の点 z_0 で狭義の極大となることはない. 即ち, z_0 の近傍 U をいくら小さくとも $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ となる $z \in U - \{z_0\}$ が存在する.

証明 背理法で証明する. 結論を否定すると, z_0 の (D に含まれる) ある近傍 $U = \{z; |z - z_0| < r\}$ について, すべての $z \in U - \{z_0\}$ に対して $|f(z)| < |f(z_0)|$ となる. さらに r を小さくとも $0 \neq |z - z_0| \leq r$ ならば常に $|f(z)| < |f(z_0)|$ となるとしてよい. このとき円 $|z - z_0| = r$ 上で

$$\left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| < \frac{|f(z_0)|}{r}.$$

ゆゑに, Cauchy の積分公式 23.1 より,

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{r} \cdot 2\pi r = |f(z_0)|$$

となり矛盾が生じる. □

注意 25.12 のちに, 正則函数が開写像であることが示されるが, それ利用した証明がある ([A], p.143). これについては 40.6 も参照されたい.

演習問題

25.13 領域 D で正則で 0 をとらない函数 $f(z)$ について, $|f(z)|$ は D 内の点で狭義の極小値をとることはない. これを証明せよ. (Hint : 25.11) [= [sy], p.111, 問 10]

25.14 函数 $f(z)$ は全平面で正則で, ある $n \in \mathbb{N}$ と定数 $R > 0$ について $|z| > R$ ならば $|f(z)| < |z|^n$ が成り立つとせよ. このとき $f(z)$ は多項式であることを示せ.

[= [A], p.131, 問題 2]

25.15 函数 $f(z)$ は点 a で正則とする. 次の事が決して成立しないことを証明せよ: 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $|f^{(n)}(a)| > n!n^n$ となる. [= [A], p.131, 問題 5]

§ 26. 調和函数

この節はいづれ 第 2 章の最後の方へ移動させる。

正則函数 $f(x + iy)$ の実部と虚部は (x, y) に関して調和性と呼ばれる性質を持つ。ここでは、これについて簡単な説明をする。

定義 26.1 \mathbb{R}^2 の領域 D で定義された函数 $(x, y) \mapsto g(x, y)$ は

$$(26.2) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g(x, y) = 0$$

を満たすとき D 上の 調和函数 と呼ばれる。

注意 26.3 通常, Laplace 作用素 と呼ばれる記号

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を用いて (26.2) は $\Delta g = 0$ と表される。

以下では, 複素数平面 \mathbb{C} と \mathbb{R}^2 を $z = x + iy \mapsto (x, y)$ なる対応で同一視する。

命題 26.4 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で函数 $f(z)$ が正則であれば $(x, y) \mapsto \operatorname{re} f(x + iy)$, $(x, y) \mapsto \operatorname{im} f(x + iy)$ は D 上の調和函数である。

証明 $u(x, y) = \operatorname{re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{im} f(x + iy)$ と書くことにすると, 25.1 と $f(z)$ が正則であることから $f'(z)$ も正則なので, 19.4 によつて

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

が成り立つ。さらに Cauchy-Riemann の関係式 10.1 を使ふと

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

がわかる。□

例題 26.5 \mathbb{R}^2 上の調和函数 $u(x, y) = x^2 - y^2$ を実部に持つ様な正則函数を求めよ。

解答 $u_{xx} = 2$, $u_{yy} = -2$ だから, 確かに $\Delta u = 0$ である。求める函数の虚部を $v(x, y)$ とすると Cauchy-Riemann の関係式より

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x.$$

これより $v(x, y) = 2xy + C$ (C は定数) である。 $z = x + iy$ のとき

$$u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy = \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) \left(\frac{z - \bar{z}}{2} \right) = z^2$$

を得る。□

定理 26.6 調和函数 $u(x, y)$ に対し, それを実部に持つ正則函数 $f(z) = f(x + iy)$ が定数の差を除いて一意的に存在する. その様な $f(z)$ の虚部 $v(x, y) = \text{im } f(z)$ を函数 $(x, y) \mapsto u(x, y)$ の 共役調和函数 と呼ぶ. このとき $-u(x, y)$ が $v(x, y)$ の共役調和函数である.

証明 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおいて Cauchy-Riemann の関係式 10.1

$$(26.7) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

が v に関する方程式とみて解けることを示せばよい. これの解 $v(x, y)$ が存在するためには, 19.6 の (3) \iff (2) より

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

が成り立てばよいが, この等式は u が調和函数であることに他ならないので, 仮定より成り立つ. よつて (26.7) を満たす $v(x, y)$ は存在する. しかも 19.6 にある通り, その様な $v(x, y)$ は定数の差を除いて一意的に存在するから, 求める正則函数も定数の差を除いて一意的に存在する. 最後の部分は演習問題 26.10 とする. \square

演習問題

26.8 $\{(x, y); y > 0\}$ で定義された函数 $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ が調和函数であることを示し, これを実部に持つ $z = x + iy$ の正則函数を求めよ.

26.9 26.5 で示した通り $u = x^2 - y^2$ は $v = 2xy$ の調和共役函数である. しかし u は v の調和共役函数ではない. このことを示せ. [= [sy], p.56, 問 18]

26.10 開集合 D 上定義された $v(x, y)$ が $u(x, y)$ の調和共役函数であるとき, $-u(x, y)$ は $v(x, y)$ の調和共役函数であることを示せ. (Hint: $f(z) = u + iv$ に対して $-if(z)$ を考へよ.) [= [sy], p.56, 問 19]

26.11 $u(x, y), v(x, y)$ はともに領域 D で調和であるとき,

$$f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

は D で正則であることを示せ. [= [sy], p.72, 章末問題 7]

26.12 正則函数 $f(x + iy)$ について

$$\Delta |f|^2 = 4|f'|^2$$

であることを示せ. [= [sy], p.56, 例題 6]

この節もいづれ、第 2 章の最後の方へ移動させる。

§ 27. 等角写像

この節は他の節に比べて、直観的な理解に重きを置いて書かれてゐる。その分、厳密性を犠牲するが、いたずらに長くなることを避けるためである。

1. 滑らかな曲線 $C: z(t)$ ($t: a \rightarrow b$) は領域 D に含まれてゐて、函数 $f(z)$ は D で連続であるとする。このとき $w(t) = f(z(t))$ は曲線を与へるが、それを \tilde{C} と記して、 C の像と呼ぶことにする。いま $f(z)$ D で正則であるとする

$$w'(t) = f'(z(t)) z'(t)$$

である。ここで 1 点 $z(t_0)$ ($t_0 \in [a, b]$) において $z'(t_0) \neq 0$, $f'(z_0) \neq 0$ であるとする。このとき、まづ $w'(t_0) \neq 0$ がわかる。ゆゑに \tilde{C} は $w_0 = f(z_0)$ で接線を持つが、その方向は

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

で定まる。但し、接線には向きも付けて考へてゐる。この式は C の z_0 における接線の方向と \tilde{C} の w_0 の接線の方向がなす角が、 $\arg f'(z_0)$ であることを示してゐる。いま C を z_0 を通る別の滑らかな曲線 C_1 に取り換へると、 z_0 における C_1 の接線の方向とその像 \tilde{C}_1 のそのなす角も、 $\arg f'(z_0)$ である。つまり C と C_1 が z_0 で交叉する角の大きさは、 \tilde{C} と \tilde{C}_1 が w_0 で交叉する角の大きさに一致する。

3. 例として、6.1, 6.2, 12.3 の図を見て欲しい。

ここで述べた性質を函数 $w = f(z)$ の各点 z における 等角性 と呼ぶ。

4. 正則函数の等角性と密接に関連する性質を以下の様に $|f'(z_0)|$ を考察することで導くことができる。まづ

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

から、 z_0 を端点とする微小な線分は、その像 (それは $f(z_0)$ を端点とする微小な線分) へと、倍率 $|f'(z_0)|$ で拡大 (縮小) されることがわかる。言ひ換へると、写像 $w = f(z)$ によつて生じる z_0 の近傍は、その方向に依らずに一定の拡大率 $|f'(z_0)|$ で w_0 の近傍に写されるのである。

5. 今度は逆に、この様な性質から $f(z)$ の正則性を導けないかを考察してみる。

$$\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) = (C \text{ に依らず一定}),$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \text{ が有限値として存在する,}$$

の双方が成り立てば $f'(z_0)$ が存在することは容易にわかる。しかし、 u_x, u_y, v_x, v_y のすべてが z_0 の近傍で連続であれば上記の一方のみから $f'(z_0)$ の存在を示せる。

6. まづ, u_x, u_y, v_x, v_y のすべてが z_0 の近傍で連続であつて, $\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0)$ は C に依らず一定であると仮定する. このとき $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ を使つて

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y'(t) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) z'(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \overline{z'(t)}. \end{aligned}$$

仮定より $\arg w'(t_0)/z'(t_0)$ は $z'(t_0)$ に依らないから,

$$(27.1) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (z_0) \frac{\overline{z'(t)}}{z'(t)}$$

の偏角は C に依らない. つまり, これの偏角は $z'(t_0)$ を変化させても変はらない. $\arg z'(t_0)$ が変化するとき (27.1) の値は中心が

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (z_0)$$

で, 半径が

$$\frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (z_0) \right|$$

の円周を動くから, 偏角が一定であるためには半径が 0 であらねばならない. ゆゑに

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &= -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \\ \therefore \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

となつて Cauchy-Riemann の関係式が z_0 において成立するので $f'(z_0)$ が存在する.

7. 次に, z_0 における倍率 $|w'(t_0)/z'(t_0)|$ が C に依存しないならば, (27.1) の絶対値が C に依らない, つまり $z'(t_0)$ に依らない. そのためには, 先に述べた円について, もしその半径が 0 でないのであれば中心が原点になければならない. 従つて

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (z_0) = 0, \quad \therefore \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

これは $\overline{f(z)}$ が z_0 において微分可能であることを示してゐる. ここで, 任意の複素数の偏角は, 共役複素数の偏角と符号が逆になつてゐるから, この場合は「向きの反転」が起きてゐる.

8. まとめると, z_0 の近傍で u_x, u_y, v_x, v_y が存在して連続であれば, z_0 における 向きを保つた等角性は $f(z)$ が z_0 で微分可能であることと同値である.

演習問題

27.2 原点以外の点 z_0 において, この z_0 を通る座標軸に平行な 2 直線を l_1, l_2 とする. この 2 直線を函数 $w = z^2$ で写した像について, 向きを保つた等角性を確認せよ.

[= [sy], p.58, 問 20]

第4章 関数の冪級数展開

§ 28. 数列と級数の収束と発散

関数列についての説明の準備として、級数についての基本的な事柄をまとめておく。
この § は完全に微分積分学で学んだ内容に含まれる。

定義 28.1 複素数列 $\{a_n\}$ について

Cauchy 条件 : 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$m > n > N \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

が成り立つとき 数列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列 をなすといはれる。

補題 28.2 (Cauchy の判定法 1) 与へられた複素数列が収束するためには、それが Cauchy 列をなすことが必要十分である。

証明 必要性は易しい。十分性については 実数の連続性 に関はつて非常に重要である。
上極限, 下極限 の概念にまで遡る必要がある。 \square

28.2 を級数の場合に述べておく。

補題 28.3 (Cauchy の判定法 2) 複素数を項とする数列 $\{a_n\}$ が与へられたとせよ。級数 $\sum a_n$ が収束するためには、その部分和のなす数列が Cauchy 列をなすこと、即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$m > n > N \implies |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

となることが必要十分である。

命題 28.4 級数 $\sum a_n$ と $\sum b_n$ が収束すれば、級数 $\sum (a_n + b_n)$ も収束する。また、複素数 c について、 $\sum a_n$ が収束すれば、 $\sum ca_n$ も収束する。

定義 28.5 すべての項が正の実数である数列を 正項数列 といひ、正項数列の和として定義される級数を 正項級数 といふ。

定義 28.6 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ について $\sum_{k=1}^n a_k$ をこの級数の 第 n 部分和 といひ、
 $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ をその 剰余 (remainder) といふ。

命題 28.7 部分和のなす数列が有界な正項級数は収束する。

命題 28.8 正項級数は和の順序をどう入れ代へても同一の値に収束する。

証明 ここで並べ替へとは、自然数の全体 \mathbb{N} から、元の級数 $\sum a_n$ の項をなす数列 $\{a_n\}$ の項全体の集合 $\{a_1, a_2, \dots\}$ への全単射写像

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots\}$$

を与へることに他ならない。その結果、新たな級数 $\sum \varphi(n)$ が得られる。ここでは $\varphi(n) = a'_n$ と書くことにする。いま、元の級数 $\sum a_n$ の第 n 部分和を S_n とし、並べ代へた級数 $\sum a'_n$ の第 n 部分和を T_n をおくと任意の n に対し、ある m が存在して

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \{a'_1, a'_2, \dots, a'_m\}$$

が成り立つから $S_n \leq T_m$ である。ゆゑに

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^m a'_k$$

である。全く同様にこれと逆の不等式が成り立つことがわかるから、2 つの級数の和は等しい。 \square

定義 28.9 複素数列 $\{a_n\}$ を項とする級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき 絶対収束 するといはれる。

定理 28.10 絶対収束する級数は収束する。

証明 与へられた級数を $\sum a_n$ とし、その第 n 部分和を S_n とおく。仮定より $\sum |a_n|$ の部分和のなす数列が Cauchy 条件を満足するので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $m \geq n > N$ ならば

$$\sum_{j=n+1}^m |a_j| < \varepsilon$$

である。このとき

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^m |a_j| < \varepsilon.$$

即ち $\{S_n\}$ も Cauchy 条件を満足する。ゆゑに 28.3 によつて $\{S_n\}$ は収束する。 \square

例 28.11 収束するが絶対収束しない例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

実際, これの第 n 部分和を S_n とすると

$$S_2 < S_4 < \dots < S_5 < S_3 < S_1,$$

$$|S_{2m} - S_{2m-1}| = \frac{1}{2m} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

なので, 極限值が存在する. しかし

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

は発散する.

命題 28.12 (優級数による判定) すべての項が正である様な 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について $\sum b_n$ が収束するとせよ, このとき次が成り立つ.

- (1) 有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除いて $a_n \leq b_n$ ならば $\sum a_n$ も収束する.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ が有限値として存在すれば $\sum a_n$ も収束する.

命題 28.13 (等比級数の収束発散) 0 でない $a \in \mathbb{C}$ を初項とし, $r > 0$ を公比とする等比級数 $\sum ar^{n-1}$ は $r < 1$ のとき, かつ, そのときに限って収束する.

命題 28.14 (正項級数と等比級数との比較) 正項級数 $\sum a_n$ について次が成り立つ:

- (1) $0 < r < 1$ が存在して, 有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除いて $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ が成り立つならば $\sum a_n$ は収束する.
 - (2) $\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ とおく. $\rho < 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する. (これは (1) を含む主張)
- 一方, $\rho > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

証明 (1) 仮定より, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ となつてゐる. このとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \frac{r^N}{1-r} < +\infty \end{aligned}$$

であるから, 級数 $\sum a_n$ は有界である. よつて 28.7 により収束する.

(2) $\rho < 1$ のとき $\rho < r < 1$ なる r を取つて固定すると, やはり, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ となつてゐるため, (1) と同じ結論が導かれる. また $\rho > 1$ であれば, 有限個の n を除いて $\sqrt[n]{a_n} > 1$, つまり $a_n > 1$ となるので $\sum a_n$ は発散する. □

補題 28.15 (グランベール d’Alambert の判定法) 正項数列 $\{c_n\}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ が存在し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$$

ならば級数 $\sum c_n$ は収束する. またこの極限が 1 より大きい場合, 級数 $\sum c_n$ は発散する.

証明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} < \rho < 1$ なる ρ をとれば有限個の n を除いて

$$c_{n+1}/c_n \leq \rho$$

が成り立つ. このとき N が存在して $n \geq N$ ならば

$$c_n \leq \rho c_{n-1} \leq \rho^2 c_{n-2} \leq \cdots \leq \rho^{n-N} c_N$$

なので

$$\sum c_n \leq \sum_{n=1}^{N-1} c_n + c_N \sum_{n=N}^{\infty} \rho^{n-N} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n + \frac{c_N \rho^{-N}}{1-\rho}$$

ゆえ, 28.7 により収束する.

一方 $r > 1$ であれば, N が存在して $n \geq N$ ならば $\frac{c_{n+1}}{c_n} > 1$ となるから,

$$n \geq N \implies c_n > c_{n-1} > \cdots > c_N$$

となる. よつて

$$\sum c_n > \sum_{n=1}^{N-1} c_n + c_N \sum_{n=N}^{\infty} 1 = \infty$$

となり発散する. □

演習問題

28.16 2つの正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとせよ.

このとき次の級数も収束することを示せ. (Hint: 28.12 を利用) [= [M], p.146, 2]

(1) $k \in \mathbb{N}$ について $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$. (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$.

28.17 次の級数の収束発散を調べよ. [= [M], p.146, 3(2), 4(4)]

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot 2^{-n}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

§ 29. 関数列

集合 $E \subset \mathbb{C}$ 上で, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して関数 $f_n(z)$ が定義されておるとする. この状況を

$$(29.1) \quad f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

あるいは $\{f_n(z)\}$ と記して 関数列 と呼ぶ.

定義 29.2 上の状況の下で, 任意の $z \in E$ について, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$$

が (有限な値として) 存在するとき, 関数列 (29.1) は 各点収束, あるいは 単純収束 するといはれる. [= [hk], p.17]

上の 29.2 のとき, 各 $z \in E$ に対して, その極限を対応させる関数 $z \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ が得られる. この関数を関数列 (29.1) の 極限関数 と呼ぶ.

定義 29.3 領域 D において定義された関数 $f_n(z)$ からなる関数列 $\{f_n(z)\}$ と D の部分集合 B について, D 上で定義された関数 $f(z)$ が存在して, 次の条件 **UC** が成り立つとき, 関数列 $\{f_n(z)\}$ は B において $f(z)$ に 一様収束 するといはれる:
UC. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n > N$ かつ $z \in B$ ならば

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

さらに, もし, 任意の compact 部分集合 $B \subset D$ において **UC** が成り立つとき $\{f_n\}$ は D で compact 一様収束 するといはれる.

注意 29.4 29.3 において, N が $z \in B$ に依存しないで選べるのが本質的である.

補題 29.5 集合 $B \subset \mathbb{C}$ において一様に $f_n(z) \rightarrow f(z)$ で, 各 $f_n(z)$ が B の各点で連続であれば, $f(z)$ も B で連続である. (「連続」の定義は 7.2 を見よ.)

証明 任意に $a \in B$ をとり, 固定する. 任意の $\varepsilon > 0$ が与へられたとせよ. 一様収束性の仮定から $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n > N, z \in B \implies |f_n(z) - f(z)| < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

ここで, $n (> N)$ を一つ選んで固定する. $f_n(z)$ の連続性から, ある $\delta > 0$ について,

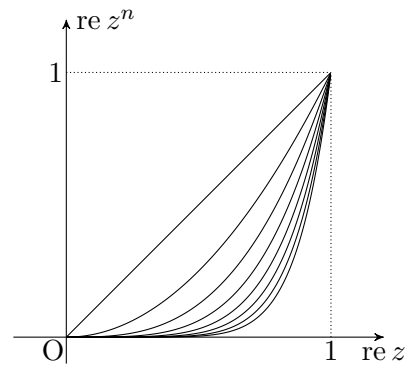
$$z \in B, |z - a| < \delta \implies |f_n(z) - f_n(a)| < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

以上から,

$$|f(z) - f(a)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

がわかる. つまり $f(z)$ は a で連続である. \square

例 29.6 $B = \{z; |z| < 1\}$, $f_n(z) = z^n$ について, この関数列は B 上で各点収束するが, 一様収束しない. 極限関数 $f(z)$ は B 上の定数関数 0 である. しかるに任意に ε を与へたとき, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ となる n は z に依存する. 例へば z が 1 に近いと, n をその近さに応じて大きくする必要がある.

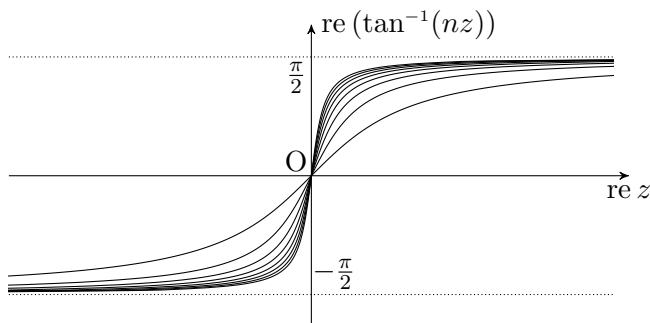


$n = 1, 2, \dots, 8$ についての z^n の図

例 29.7 $B = \{z; z \in \mathbb{R}\}$, $f_n(z) = \tan^{-1}(nz)$ について, この関数列は B 上で各点収束するが, 一様収束しない. 極限関数 $f(z)$ は

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (z < 0), \\ 0 & (z = 0), \\ \frac{\pi}{2} & (z > 0) \end{cases}$$

であつて, $z = 0$ で不連続である. 任意に ε を与へたとき, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ となる n は z に依存する. z が 0 に近いと, n をその近さに応じて大きくする必要がある.



$n = 1, 2, \dots, 8$ についての $\tan^{-1}(nz)$ の図

定理 29.8 領域 D で正則な函数からなる函数列 $\{f_n(z)\}$ は D 上で函数 $f(z)$ に compact 一様収束するものとする. このとき $f(z)$ は D で正則である. さらに $\{f_n'(z)\}$ も D 上で $f'(z)$ に compact 一様収束する.

証明 前半については [A], p.189 にある 2 つの証明を紹介する.

証明 1. D 内の任意の閉曲線 C について, Cauchy の定理により $\int_C f_n(z) dz = 0$. また C は compact 集合なので, 仮定より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $z \in C$ について $n > N$ ならば $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ となる. このとき

$$\left| \int_C f(z) dz - \int_C f_n(z) dz \right| \leq \int_C |f(z) - f_n(z)| |dz| < \varepsilon \cdot \text{length}(C).$$

$$\therefore \int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

ここで C は任意に選べるので Morera の定理 25.2 より, $f(z)$ は D で正則である.

証明 2. 任意の $z \in D$ と, 十分小さい $r > 0$ について $\overline{U_r(z)} \subset D$ であり, $\overline{U_r(z)}$ は compact 部分集合だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\zeta \in \overline{U_r(z)}, n > N \implies |f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \varepsilon$$

となる. 一方, Cauchy の積分表示 23.1 を使えば, 各 n について,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

ここに $K_r = \{\zeta; |\zeta - z| = r\}$ である. これらのことから, $n > N$ であれば

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{K_r} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = \varepsilon.$$

$$\therefore f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

ここで $f_n(\zeta)$ は D で連続ゆゑ 29.5 から, $f(\zeta)$ は K_r 上で連続である. よつて上の式と Ahlfors の補題 24.3 から $f(z)$ は D で正則であることがわかる.

導関数に関する部分. 第 2 証明の考察を, Cauchy の導関数積分公式 24.1 による

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

に行へば, $\{f_n(z)\}$ の一様収束性から, 任意の compact 集合 (変数 z) 上で一様に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = f'(z)$$

である事がわかる (問 29.9). 最後の等号は再び 24.1 による. □

問 29.9 29.8 の最後の導関数についての部分の証明を精密に復元せよ.

系 29.10 各項 $f_n(z)$ が領域 D で正則な函数からなる級数

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

が D で compact 一様収束するならば, 和 $f(z)$ は D で正則であり,

$$f'(z) = f_1'(z) + f_2'(z) + f_3'(z) + \cdots + f_n'(z) + \cdots$$

が成り立つ.

証明 部分和 $S_n(z)$ を $f_n(z)$ として 29.8 を適用すればよい. □

上の 29.10 の様な主張を 項別微分 できる, などといふ.

次の命題は 32.1 の証明と 35.3 の証明で用いる.

命題 29.11 長さが有限で滑らかな曲線 C 上で定義された連続な函数の列 $f_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を項とする級数の和が C 上で函数 $S(z)$ に一様収束するとする:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad (C \text{ 上で一様}).$$

このとき $S(z)$ も C で連続な函数であり, しかも

$$\int_C S(z) dz \left(= \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z) dz$$

が成り立つ. (この様な事実は 積分と和が交換できる または 項別積分ができる などと称される.)

証明 与へられた函数列からなる級数の第 n 部分和を

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z)$$

とおくと, $S_n(z)$ は連続であり, これのなす函数列が $S(z)$ に一様に収束するのであるから, 29.5 より $S(z)$ も連続である. 仮定より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n > N, z \in C \implies |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} \left| \int_C S(z) dz - \sum_{j=1}^n \int_C f_j(z) dz \right| &= \left| \int_C S(z) dz - \int_C \left(\sum_{j=1}^n f_j(z) \right) dz \right| \\ &= \left| \int_C S(z) dz - \int_C S_n(z) dz \right| = \left| \int_C (S(z) - S_n(z)) dz \right| \\ &\leq \int_C |S(z) - S_n(z)| |dz| < \varepsilon \cdot \text{length}(C). \end{aligned}$$

よつて主張は示された. □

収束の定義に基いて実際の場面を調べるには、極限函数 $f(z)$ を知つてみなければならず、不便である。しかし、その様な場面では、数列のときと同様に、次の Cauchy の判定法が役立つ。

定理 29.12 (Cauchy の収束判定法) 領域 D で定義された複素函数 $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) からなる函数列 $\{f_n(z)\}$ が $z \in D$ で収束するためには、次が成り立つ様な $N \in \mathbb{N}$ が存在することが必要十分である:

自然数 m, n について $m > n > N$ であれば

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

また、この函数列が部分集合 $B \subset D$ で一様収束するためには、 B の点 z に依存しない様な上の N が存在することが必要十分である。 [= [sy], p.116, 問 1]

証明 前半は、任意に固定された $z \in D$ についての複素数列 $\{f_n(z)\}$ についての主張に他ならないから、28.2 そのものである。

一様収束の場合の必要性. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ かつ $z \in B$ ならば、

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

いま $m > n > N$ ならば

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &= |f_m(z) - f(z) + f(z) - f_n(z)| \\ &\leq |f_m(z) - f(z)| + |f(z) - f_n(z)| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

これが $z \in B$ に依らずに成り立つので正しい。

一様収束の場合の十分性. 仮定から、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ をとれば、 $m > n > N$ ならば任意の $z \in B$ について

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ。上で示された通り、 $\{f_m(z)\}$ が極限值 $f(z)$ を持つので、 z を固定して $m \rightarrow \infty$ とすれば、よく知られた極限と不等式の関係から、 $n > N$ ならば

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon.$$

与へられた ε に対し、 $z \in B$ ならばこれが成り立つので、収束は一様である。 \square

命題 29.13 $\sum |f_n(z)|$ が一様収束すれば $\sum f_n(z)$ も一様収束する。

証明 28.10 の a_j を $a_j = f_j(z)$ とおいて、その証明を辿り直すだけ。 \square

命題 29.14 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、領域 D で定義された函数 $f_n(z)$ と部分集合 $E \subset D$ に対して、正項数列 $\{M_n\}$ があつて、 $z \in E$ ならば

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

が成り立ち、さらに

$$\sum M_n$$

が収束するとする。このとき、級数 $\sum f_n(z)$ は E で絶対かつ一様に収束する。

[= [sy], p.118]

証明 $\sum M_n$ の収束性から、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $m > n > N$ ならば

$$M_n + M_{n+1} + \cdots + M_m < \varepsilon.$$

しかるに

$$|f_n(z)| + |f_{n+1}(z)| + \cdots + |f_m(z)| \leq M_n + M_{n+1} + \cdots + M_m < \varepsilon.$$

であるから $\sum |f_n(z)|$ の部分和からなる数列は 29.12 を満たす。 □

演習問題

29.15 次の級数は集合 E で絶対かつ一様に収束することを証明せよ。

(Hint: 29.14 を利用する.) [= [sy], p.119, 問 2(1)(2)(3)(4)]

<p>(1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (E: z < 0.9).$</p> <p>(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n z)}{n(n+1)}, \quad (E: z < \infty).$</p>		<p>(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (z + n^2)^{-1}, \quad (E: z < \infty).$</p> <p>(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad (E: z \leq 1).$</p>
--	--	---

§ 30. 整級数の性質

定義 30.1 c_0, c_1, c_2, \dots を複素数の定数とする. 定点 $a \in \mathbb{C}$ と複素変数 z について,

$$(30.2) \quad c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

の形の級数を, 点 a を中心とする 整級数 と称する.

ここでは, 整級数の収束, 発散について議論する.

定理 30.3 点 a を中心とする整級数

$$(30.4) \quad c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

に対して, 次のいずれかが成り立つ.

- (1) 任意の z に対して (30.4) は収束する. このとき, この級数の 収束半径 は ∞ であるといひ, 全平面をこの級数の 収束円 と称する.
- (2) ある $\rho > 0$ があつて, 任意の定数 $0 < r < \rho$ に対して, この級数は領域 $|z-a| \leq r$ で絶対かつ一様に収束し, 領域 $|z-a| > \rho$ では発散する. このとき ρ をこの級数の 収束半径, 領域 $|z-a| < \rho$ をこの級数の 収束円 と呼ぶ;
- (3) いかなる $z (\neq a)$ に対しても収束しない. このとき, この級数の 収束半径 は 0 であるといひ, この場合は集合 $\{a\}$ を 収束円 とする.

証明 いま z_0 で (30.4) が収束するとする. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(z_0-a)^n = 0$ であるから, 数列 $\{|c_n(z_0-a)^n|\}$ は有界, 即ち, 定数 $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$|c_n(z_0-a)^n| < M$$

である. このとき $|z-a| < |z_0-a|$ なる任意の z について

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n < M \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n$$

であるが $\left| \frac{z-a}{z_0-a} \right| < 1$ ゆゑ $\sum M \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n$ は収束する. 従つて 28.12 から

$$\sum |c_n(z-a)^n|$$

は収束する. さらに 28.9 によつて $\sum c_n(z-a)^n$ 自身も収束する.

さて (1) でも (3) でもない場合は $0 < \sup \{|z-a|; (30.4) \text{ は } z \text{ で収束する}\} < +\infty$ が存在する. これが (2) のいふ ρ であることは上の議論からわかる. \square

定理 30.5 (Cauchy-Hadamard の定理) ^{アダマール} 整級数

$$(30.6) \quad c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

の収束半径 ρ は次で与えられる:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

注意 30.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ の値が正の有限値であればその逆数が収束半径, その値が 0 であれば収束半径は無有限大. その値が $+\infty$ であれば収束半径は 0.

補題 30.8 $z_0 (\neq 0)$ について整級数

$$c_0 + c_1 z_0 + c_2 z_0^2 + \cdots$$

が収束するならば, $M > 0$ が存在して, 全ての $n \in \mathbb{N}$ について次が成り立つ:

$$|c_n| \leq \frac{M}{|z_0|^n}.$$

証明 仮定より, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N \implies |c_n z_0^n| \leq 1$ であるから,

$$M = \max\{|c_0|, |c_1 z_0|, |c_2 z_0^2|, \dots, |c_N z_0^N|, 1\}$$

とおけば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $|c_n z_0^n| \leq M$, つまり $|c_n| \leq \frac{M}{|z_0|^n}$ である. \square

証明 (30.5 の証明) $z = z_0$ で整級数 (30.6) が収束するとせよ. 30.8 より, M が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|z_0 - a| \leq \frac{M^{\frac{1}{n}}}{|c_n|^{\frac{1}{n}}}$. $n \rightarrow \infty$ のとき $M^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ であるから

$$|z_0 - a| \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

つまり $\rho \leq 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ である.

ここで, もし収束半径 ρ が $\rho < 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ を満たすとすると

$$\rho < |z_0 - a| < 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

なる z_0 がとれる. いま, この不等式の右側を $|z_0 - a| \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ と書き代へて,

$|z_0 - a|^n \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < \delta < 1$ なる δ をとれば, 有限個の n を除き $|c_n(z_0 - a)^n| < \delta^n$ となることがわかるが, $\sum \delta^n$ が収束することから, (30.6) が $z = z_0$ で絶対収束することがわかる. ゆえに 30.3(2) より $\rho \geq |z_0 - a|$ でなくてはならず, 矛盾である. \square

問 30.9 28.14(2) を用いた 30.5 の別証を与へよ.

(Hint; 28.14(2) によれば, $\limsup \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = |z-a| \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ の値が 1 より小さいか大きいかによつて, $\sum |c_n(z-a)^n|$ の収束, 発散が決まる. 30.12 の証明も参考にせよ.)

例題 30.10 次の冪級数の収束半径を求めよ：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

解答 係数の n 乗根

$$(30.11) \quad \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

の対数を考えると

$$\begin{aligned} & \log n - \frac{1}{n} (\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n) \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\log j - \log n) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log \frac{j}{n} \\ &\rightarrow -\int_0^1 \log x \, dx = -\left[x \log x - x \right]_0^1 = 1 \quad (\because \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0.). \end{aligned}$$

ゆゑに (30.11) の極限值は e である。よつて求める収束半径は $1/e$ である。 \square

定理 30.12 (d’Alambert の定理) 数列 $\{c_n\}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

が存在するならば級数 (30.2) の収束半径 ρ はこの極限に一致する。

証明 $\rho' = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ とおく。 $0 \neq |z_0 - a| < \rho'$ であれば、 $r|z_0 - a| < \rho'$ なる $r > 1$ が存在する。よつて、 $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$n > N \implies r|z_0 - a| < \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

となる。このとき

$$|c_{n+1}(z_0 - a)^{n+1}/c_n(z_0 - a)^n| = |c_{n+1}(z_0 - a)/c_n| < 1/r < 1$$

であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}(z_0 - a)^{n+1}/c_n(z_0 - a)^n| \leq 1/r < 1$ となる。28.15 により、 z_0 について (30.2) は収束する。よつて $\rho' \leq \rho$ である。

そこで $\rho' < \rho$ であると仮定する。このとき $\rho' < |z_0 - a| < \rho$ なる z_0 が存在する。さらに $\rho' < r|z_0 - a| < \rho$ なる $0 < r < 1$ がとれる。ゆゑに $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$n > N \implies \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| < r|z_0 - a|$$

となるが、これより $n > N$ ならば

$$|c_{n+1}(z_0 - a)^{n+1}/c_n(z_0 - a)^n| = |c_{n+1}(z_0 - a)/c_n| > 1/r > 1$$

であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}(z_0 - a)^{n+1}/c_n(z_0 - a)^n| \geq 1/r > 1$ となる。再び 28.15 により、 z_0 について (30.2) は発散する。これは収束半径 ρ の定義に矛盾する。 \square

先の 30.10 を 30.12 を使つて解いてみる.

例題 30.13 次の冪級数の収束半径を求めよ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

解答 第 $n+1$ 項の係数と第 n 項の係数の極限は

$$\frac{n^n}{n!} \bigg/ \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1 \bigg/ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるので, 収束半径は $1/e$ である. □

演習問題

30.14 次の整級数の収束半径を求めよ. [= [sy], p.134, 問 3 (1)(2)(3)]

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}. \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

30.15 次の整級数の収束半径を求めよ. [= [sy], p.124, 問 4 (1)(2)(3)(4)]

$$(1) 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

$$(2) 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \cdots.$$

$$(3) 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots \quad (\alpha \neq 0, \notin \mathbb{N}).$$

$$(4) 1 + \frac{z}{a+1} + \frac{z^2}{a^2+2} + \cdots + \frac{z^n}{a^n+n} + \cdots \quad (a > 0).$$

30.16 次の冪級数の収束円を求めよ. [= [hk], p.20, 問 1.34]

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} z^n. \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}. \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (z-i)^n.$$

30.17 0 を中心とする次の冪級数の収束半径を求めよ. [= [hk], p.22,25(1)~(5)]

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+2i)^n} \quad \left| \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n) z^n.\right.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n. \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n.$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) z^{n-1}.$$

§ 31. 項別微分と項別積分

冪級数の各項の導函数や不定積分の和は、元の冪級数と同じ収束半径を持ち、しかも元の級数が定める函数の導函数や不定積分に他ならない、といふことを証明したい。29.10 においても触れたが、このような事実を 項別微分、項別積分 が可能であると称する。

次の定理の前半は 29.10 の特殊な場合に他ならないから、その系であるとするべきであるが、29.10 は Cauchy の定理などの重厚な結果を使つて証明してゐることに鑑み、冪級数の場合に、それらを使はない簡易な証明 ([A], pp.40-41) を述べておく。

定理 31.1 a を中心とする冪級数

$$(31.2) \quad c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots$$

の収束半径を ρ とする。これの収束円 $|z-a| < \rho$ 上でこの級数が与へる函数はこの収束円上の正則函数であり、その導函数は各項の導函数の和

$$(31.3) \quad c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots$$

で与へられ、この級数の収束円も $|z-a| < \rho$ である。

証明 Step 1. 始めに最後の主張を証明する。そのために $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ に注意する。実際、 $n \geq 2$ について $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ をおくと、 $\delta_n > 0$ で、 $n = (1 + \delta_n)^n > 1 + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2$ だから、 $\delta_n^2 < \frac{2}{n}$ となり、 $\delta_n \rightarrow 0$ である。さて、このことから

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \rho.$$

よつて (31.3) は (31.2) と同一の収束半径を持ち、 $f_1(z)$ の収束半径も ρ である。

Step 2. 次に $f'(z) = f_1(z)$ を示したい。 $|z-a| < \rho$ なる z に対し、次の様におく：

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-a)^j = s_n(z) + R_n(z), \quad (\text{第 } n \text{ 部分和} + \text{剰余 (remainder)}), \\ s_n(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j(z-a)^j, \quad R_n(z) = \sum_{j=n}^{\infty} c_j(z-a)^j, \\ f_1(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} jc_j(z-a)^{j-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n'(z). \end{aligned}$$

$|z_0 - a| < \rho$ なる z_0 を任意に固定し、 $|z_0 - a| < r < \rho$ なる r をとる。さらに $z \neq z_0$ なる z を z_0 に十分近くとつて $|z-a| < r < \rho$ としてよい。ここで、

$$(31.4) \quad \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) = \left(\frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s_n'(z_0) \right) + (s_n'(z_0) - f_1(z_0)) + \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0}$$

と 3 つに分ける。いま、任意に $\varepsilon > 0$ が与へられたとせよ。(31.4) の右辺の第 1 項について、 $s_n(z)$ は $z = z_0$ で微分可能だから、 $\delta > 0$ が存在して $|z - z_0| < \delta$ ならば

$$(31.5) \quad \left| \frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s_n'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

第 2 項については $f_1(z_0)$ が収束する級数だから, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N_1$ ならば

$$(31.6) \quad |s_n'(z_0) - f_1(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

第 3 項について,

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k \frac{(z-a)^k - (z_0-a)^k}{z - z_0} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k \left| \frac{(z-a)^k - (z_0-a)^k}{(z-a) - (z_0-a)} \right| \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k |(z-a)^{k-1} + (z-a)^{k-2}(z_0-a) + (z_0-a)^{k-2}(z-a)^2 + \cdots + (z_0-a)^{k-1}| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} k |c_k| r^{k-1} \quad (\because |z-a| < r, |z_0-a| < r) \end{aligned}$$

である. ここで (31.3) の各項の絶対値をつた級数が収束半径 ρ を持つて収束することと, $r < \rho$ であることから, 上の最後の和は収束級数の剰余である. よつて $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N_2$ ならば

$$(31.7) \quad \left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Step 3. (31.4), (31.5), (31.6), (31.7) より, $|z - z_0| < \delta$ かつ $n > \max(N_1, N_2)$ ならば

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) \right| < \varepsilon$$

である. ここで, この式は n とは無関係に成り立つことに注意せよ. $z \rightarrow z_0$ として $f'(z_0) = f_1(z_0)$ を得る. しかるに z_0 は任意ゆゑ $f'(z) = f_1(z)$ が証明された. \square

注意 31.8 31.1 から, 項別微分を繰り返へすことで, 高次の導函数の級数展開も得られることもわかつた.

定理 31.9 a を中心とする冪級数

$$(31.10) \quad c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \cdots$$

の収束半径を ρ とする. これの収束円 $|z-a| < \rho$ 上でこの級数が与へる函数はこの収束円上の正則函数であり, この函数の各項の ($z=a$ で消える) 不定積分の和

$$(31.11) \quad c_0(z-a) + \frac{c_1}{2}(z-a)^2 + \frac{c_2}{3}(z-a)^3 + \frac{c_3}{4}(z-a)^4 + \cdots$$

の収束円も $|z-a| < \rho$ であり, これの導函数は (31.10) である.

証明 (31.11) が (31.10) と同一の収束半径を持つことは 31.1 の Step 1 と同様にわかる. 31.1 より (31.11) の導函数が (31.10) であることがわかるから, この定理の主張は示された. \square

§ 32. 正則函数の冪級数展開

31.1 の逆を含む次が成り立つ.

[sy] pp.128-137
の内容.

定理 32.1 (Taylor 展開定理) 函数 $f(z)$ は $|z - a| < R$ において正則とする. このとき $f(z)$ は $|z - a| < R$ において絶対かつ compact 一様収束する整級数に

$$(32.2) \quad f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots$$

と, 一意的に展開され, 任意の $0 < r < R$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ について次が成り立つ:

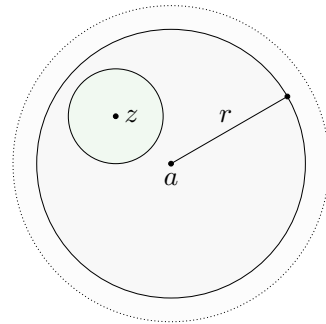
$$(32.3) \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

証明 $|z - a| < R$ なる任意の z と $|z - a| < r < R$ なる r をとる. さらに

$$\{\zeta; |\zeta - z| \leq d\} \subset \{\zeta; |\zeta - a| < r\}$$

なる $d > 0$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = d} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\because \text{Cauchy の積分表示 23.1}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\because \text{Cauchy の積分公式 20.2}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^j d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^j d\zeta \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (z - a)^j \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{j+1}} d\zeta \quad (\because \text{項別積分定理 29.11}). \end{aligned}$$



ここで, 最後の 1 つ前の被積分級数は $|\zeta - a| = r$ で一様収束する. 実際, まづ, 正則性から, $f(\zeta)$ は $|\zeta - a| = r$ で連続であり, それゆゑ有界だから $|f(\zeta)| < M$ とすると,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^j \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M}{r} \left(\frac{|z - a|}{r}\right)^j$$

で右辺の級数は収束する. よつて左辺は $|\zeta - a| = r$ で一様収束する. これより直ちに収束性の主張が従ふが, それが上の計算の最後の段階で項別積分定理 29.11 を適用できた理由である. さらに, Cauchy の積分定理 20.2 より, 項別積分後の表示での r の $|z - a| < r$ なる制限は不要となる. 級数表示 (32.2) について, 項別微分と $z = a$ の代入を繰り返へすことで (32.3) の第 1 の等号が得られるが, それは c_n が $f(z)$ のみから定まることを意味するので, 冪級数展開 (32.2) が従ふ. (32.3) の第 2 の等号は Cauchy の導函数積分公式 24.1 そのものであり, それが再び証明されたことになる. \square

整級数の特徴を映し出してある 31.1 と 32.1 に鑑み次の定義をする.

定義 32.4 領域 D で定義された函数 $f(z)$ が, D の点 a について, a を中心とする正の収束半径を持つ整級数に展開されるとき $f(z)$ は a において解析的であるといはれる. また, D 上の任意の点で解析的ならば, $f(z)$ は D 上の解析函数である, または $f(z)$ は D 上で解析的であるといはれる.

注意 32.5 32.1 は D 上の正則函数は D 上の解析函数であるといふ主張に他ならない. 逆に 31.1 は D 上の解析函数は D 上の正則函数であることいふ主張に他ならない. この様に 領域上では, 正則函数と解析函数の概念は完全に一致する. 前者は微分の視点からの呼び方であり, 後者は整級数の視点からの呼び方である.

注意 32.6 何回でも微分できる函数と正則函数の概念的な違いを例示しておく. いま \mathbb{R} で定義された函数

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考察する. これは \mathbb{R} の至るところ何回でも微分できる (C^∞ 級函数といはれる) が, 0 を中心とした冪級数には展開できない. 実際, すべての $n \in \mathbb{N}$ について $g^{(n)}(0) = 0$ であるが, $g(x)$ が 0 になるのは $x = 0$ のみである. 一方, 複素領域 $0 < |z - a| < r$ で定義された複素函数 $f(z)$ がこの領域で正則であれば, 次節に述べる様に a を中心とした負冪を持った冪級数に展開できる (Laurent 展開) から, 上の函数の $g(x)$ の状況を複素平面には持ち込めないが, 無限回微分可能函数と解析函数の概念としての違いを理解する参考にはなるであらう.

例題 32.7 $f(z) = \frac{1}{2-z}$ を $z = 1$ および $z = 0$ において Taylor 展開し, その収束半径を求めよ.

解答 $z = 1$ における展開は

$$f(z) = \frac{1}{1 - (z-1)} = 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots$$

収束半径は d'Alambert の定理 30.12 から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1.$$

$z = 0$ における展開は

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{z}{2}\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

収束半径は d'Alambert の定理 30.12 から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$$

である. □

さらに重要な例として、よく使われる函数

$$e^z, \sin(z), \cos(z), \log(1-z), (1+z)^a$$

の展開を見てみると (§34 を見よ), それは微積分で学んだものとなにも変はらない.

もう一つ, Taylor 展開の例を挙げる.

例 32.8 逆正接函数 $\tan^{-1} z$ は

$$\begin{aligned} \tan^{-1} z &= \int_0^z \frac{1}{1+z^2} dz \\ &= \int_0^z (1 - z^2 + z^4 - \dots) dz \quad (|z| < 1) \\ &= z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \dots \quad (|z| < 1) \quad (\because \text{項別積分定理 29.11 または 31.9}) \end{aligned}$$

と収束半径 1 の整級数に展開される. (16.2) の表示からわかる様に $\tan^{-1} z$ は $z = \pm i$ で正則でないから, 確かに 32.1 が成立してゐる.

定理 32.9 (Cauchy の評価式) a を定点とし, $R > 0, M > 0$ を定数とする. 函数 $f(z)$ は次の (1) または (2) を満たすとする:

- (1) 領域 $|z - a| < R$ で正則で, この領域で $|f(z)| \leq M$;
 - (2) 円板 $|z - a| \leq R$ を含む領域で正則かつ円 $|z - a| = R$ 上で $|f(z)| \leq M$.
- このとき, 次が成り立つ:

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{M}{R^n}.$$

証明 (1) の場合は $0 < r < R$ なる r を任意にとれば, Cauchy の導函数積分公式 24.1 または 32.1 から

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

ここで r が任意であることから

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{M}{R^n}$$

でなければならない. (2) の場合も同様なので省略する. □

問 32.10 上の 32.9 の (2) の場合について, 証明の詳細を述べよ.

§ 33. 一致の定理

定義 33.1 領域 D で定義された正則函数 $f(z)$ と点 $a \in D$ について, $f(a) = 0$ ならば a は $f(z)$ の 零点 と呼ばれる.

定理 33.2 (一致の定理 I, 零点の孤立性) 領域 D で正則な函数 $f(z)$ と D 内の点 b に収束する b と異なる点からなる点列 $\{a_n\}$ について, $f(a_n) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるとする. このとき $f(z)$ は D の至るところで 0 である. つまり, 定数でない正則函数の零点は孤立してゐる.

証明 3 つの段階に分けて証明する.

Step 1. $b \in D$ より $f(z)$ は b を中心として Taylor 展開できる. その整級数は, 少なくとも b から ∂D までの距離を半径とした円板の内部 K で収束する. いま, この整級数の 0 でない最小次数の項を第 m 次とすれば,

$$(33.3) \quad f(z) = c_m(z-b)^m + c_{m+1}(z-b)^{m+1} + \dots, \quad (c_m \neq 0)$$

と書ける. ここで, $a_n \rightarrow b$ ゆゑ, $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $a_n \in K$ である. このことに注意して, $n > N$ について $z = a_n$ とおくと

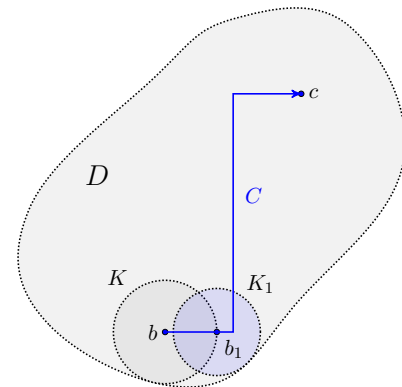
$$0 = c_m(a_n - b)^m + c_{m+1}(a_n - b)^{m+1} + \dots$$

仮定より $a_n \neq b$ であることに注意して, 両辺を $(a_n - b)^m$ で割ると

$$0 = c_m + c_{m+1}(a_n - b) + \dots$$

となる. これが任意の n について成り立つので $n \rightarrow \infty$ とすると $0 = c_m$ を得る. これは c_m の選び方に反する. 従つて (33.3) の係数はすべて 0 でなければならない. 以上から K において $f(z)$ は恒等的に 0 である.

Step 2. 任意に $c \in D$ をとる. D は領域だから b から c に至る特殊折れ線 C が存在する. C と ∂K の最後の交点を b_1 とし, b_1 を中心として半径が b_1 と ∂D との距離である様な円板の内部 K_1 とすると, b_1 に収束する点列 $\{a'_n\}$ で $f(a'_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) なるものが $K \cap K_1$ 内に存在するから, b_1 において Step 1 と同様な議論をすることにより, $f(z)$ が $K \cup K_1$ 上で恒等的に 0 であることがわかる.



Step 3. 次に C と ∂K_1 の最後の交点を b_2 とし, 同様な議論を行ふ. この議論を続けて, 円板 K_1, K_2, \dots を得るが, 有限回で c を含む円板を得るに至る. 即ち $f(c) = 0$ が示された. □

注意 33.4 [A], pp.135-136 では 33.2 が位相を概念を使つて簡明に証明されてゐる.

系 33.5 (一致の定理 II) 領域 D 内の点 b , および, b と異なる点からなる, b に収束する点列 $\{a_n\}$ があり, D で正則な 2 つの函数 $f(z)$ と $g(z)$ が $f(a_n) = g(a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとき, D 全体で $f(z) = g(z)$ である.

証明 函数 $f(z) - g(z)$ に対して 33.2 を適用すればよい. □

定義 33.6 函数 $f(z)$ は領域 D 上で定義されてみるとせよ. a を D の閉包 \bar{D} に属する定点とする. a を中心とした正の収束半径 (R とする) を持つ整級数が存在して, $U_R(a) \cap D$ 上で, それが $f(z)$ と一致するならば a を $f(z)$ の 正則点 と呼ぶ. さもなくば a を $f(z)$ の 特異点 と呼ぶ. [= [TK], pp.47-48 の一般化]

注意 33.7 a が $f(z)$ の正則点であれば, $f(z)$ の $U_R(a)$ 上での値をその整級数での値として定めることにより $f(z)$ は a で正則 (解析的) と見做すべきである. この様な状況は, 後に §36 において説明される 除去可能特異点 の場合と同様である.

例 33.8 特異点の例を挙げておく. D は定義域である.

- (1) a は $\frac{1}{z-a}$ ($D = \{z; z \neq a\}$) の特異点.
- (2) a は $\sqrt{z-a} = \exp\left(\frac{1}{2} \log|z-a| + \frac{i}{2} \text{Arg}(z-a)\right)$ ($D = \mathbb{C}$) の特異点.
- (3) 0 は $f(z) = \begin{cases} 1 & (z=0 \text{ のとき}) \\ z & (z \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ ($D = \mathbb{C}$) で定義される函数 $f(z)$ の特異点.
- (4) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ が $D = \{z; |z| < 1\}$ で定める函数については 1 のみが特異点.
- (5) 32.13 の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ について, 収束円 ($D = \{z; |z| < 1\}$) の周上のあらゆる点は特異点.

演習問題

33.9 a を定点とする. a を中心とする収束半径 $R > 0$ の整級数によつて領域 $|z-a| < R$ で定義される函数 $f(z)$ は, 円 $|z-a| = R$ 上に少なくとも 1 つの特異点を持つ. これを証明せよ. [= [TK], p.48, 定理 53]

(Hint: 円 $|z-a| = R$ が compact 集合であること, および, 一致の定理 II 33.5 を利用)

33.10 a, b を異なる定点とする. 函数 $f(z)$ は $z=b$ を特異点に持ち, 領域 $|z-a| < |b-a|$ で正則であるとせよ. このとき $f(z)$ は a 中心に収束半径 $|b-a|$ の整級数に展開される. これを証明せよ. (Hint: これは 33.9 の系である.)

33.11 次の函数を指定された点 a を中心として Taylor 展開したときの収束半径を展開しないで求めよ. [= [sy], p.145, 章末問題 3 (1)(2)(3)(4)]

- | | |
|---|--|
| <p>(1) $\frac{\sin z}{z^2 + 3}, a = 0.$</p> <p>(2) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} (z \neq 0), f(0) = 1,$
$a = 0.$</p> | <p>(3) $\frac{e^z}{z(z-1)}, a = 4i.$</p> <p>(4) $\frac{1}{\cos \pi z}, a = 1.$</p> |
|---|--|

§ 34. 基本的な函数の Taylor 展開

ここでは, 実用のために, 基本的な函数の 0 における Taylor 展開を記しておく.

例 34.1 最も重要なものは以下の 4 つである:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \\ \cos z &= 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \sin z &= x - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \end{aligned}$$

これらは

$$\frac{d^n}{dz^n} e^z = e^z, \quad \frac{d^n}{dz^n} \cos z = \cos\left(z + \frac{\pi}{2} n\right), \quad \frac{d^n}{dz^n} \sin z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2} n\right)$$

と Taylor 展開定理 32.1 により簡単にわかる. これらの収束半径は ∞ である. また

$$\log(1-z) = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

であることが

$$\frac{d^n}{dz^n} \log(1-z) = \frac{(n-1)!}{(1-z)^n} \quad (n \geq 1)$$

と Taylor 展開定理 32.1 からわかるが, これは

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

を項別積分しても得られる.

例題 34.2 函数

$$f(z) = \frac{z}{1-e^{-z}}$$

について答へよ.

(1) $f(0) = 1$ と定義することで, $f(z)$ は領域 $\{z; |z| < 2\pi\}$ で正則となることを示せ.

(2) この函数を 0 を中心に Taylor 展開したとき, 係数は有理数となることを示せ.

それを通常

$$(34.3) \quad \frac{z}{1-e^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

と書き, B_n を第 n Bernoulli 数と呼ぶ.

(3) $B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{12}$ であることを示せ. ($B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{72}$ と続く.)

(4) 級数 (34.3) の収束半径は 2π であることを示せ.

問 34.4 次の Taylor 展開が正しいことを示せ:

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

例 34.5 逆三角関数についても 0 における Taylor 展開を記しておく:

$$\begin{aligned} \sin^{-1} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{3}{40} z^5 + \dots, \\ \tan^{-1} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 - \dots. \end{aligned}$$

但し $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$ である. これらを得るには,

$$\begin{aligned} \sin^{-1} z &= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \zeta^n \right) d\zeta, \\ \tan^{-1} z &= \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^{2n} \right) d\zeta \end{aligned}$$

に関して, 項別積分定理 29.11 を適用すればよい.

例題 34.6 α を任意の複素定数とせよ. このとき

$$(1+z)^\alpha = \exp(\alpha(\log|1+z| + i \operatorname{Arg}(1+z)))$$

は $|z| < 1$ で正則であつて

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= \exp(\alpha(\log|1+z| + i \operatorname{Arg}(1+z))) \\ &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^j \quad (|z| < 1) \end{aligned}$$

と展開されることを示せ.

解答 正則性は $z = x + iy$ と書いて Cauchy-Riemann の関係式が成り立つことを確かめればよい. その際, $|z| < 1$ より $(1+x)^2 + y^2 \neq 0$ であることに注意する. また右辺の展開係数について $|\alpha| = a$ として評価しつつ d’Alambert の定理を適用すると, 右辺の収束半径が 1 であることがわかる. また, 微分積分で学んだことから $-1 < z < 1$ のときに, 両辺は等しい. 以上から, 一致の定理 II 33.5 によつて両辺が等しいことがわかる. \square

§ 35. Laurent 展開

定義 35.1 定数 c_n ($n \in \mathbb{Z}$) と定点 $a \in \mathbb{C}$ について, z を変数とした級数

$$\cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

を Laurent 級数 と呼ぶ. これは, 2 つの級数

$$\cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a}, \quad c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

の和として定義される.

定義 35.2 $R_2 > R_1 \geq 0$ を定数として,

$$\{z; R_1 < |z-a| < R_2\}$$

と書かれる領域を一般に 円環領域 と称する.

定理 35.3 (Laurent 展開定理) 函数 $f(z)$ が円環領域 $\{z; R_1 < |z-a| < R_2\}$ において正則であれば, それはこの領域で収束する Laurent 級数として

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

と唯一通りに表される. これを $f(z)$ の a を中心とした Laurent 展開 と呼ぶ. ここで, 係数 c_n は (Taylor 展開と全く同じで, 単に n として 負の整数 も許せばよく)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

で与えられる. ただし r は $R_1 < r < R_2$ なる任意の定数. また, 上の級数は, この円環領域内で compact 一様収束かつ絶対収束する.

証明 Step 1. R_1', R_2' を $R_1 < R_1' < R_2' < R_2$ となる様にとる.

さらに z を $R_1' < |z-a| < R_2'$ なる様にとる. Cauchy の積分表示 23.1 により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

この 2 項をそれぞれ $f_2(z), f_1(z)$ とおく: $f(z) = f_2(z) + f_1(z)$.

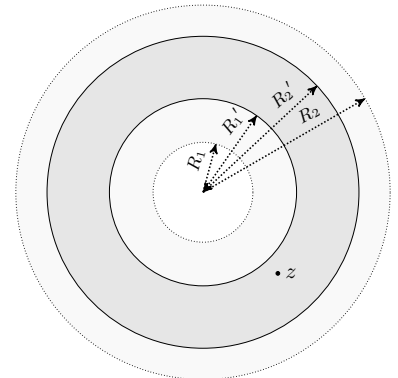
$f(\zeta)$ は 2 つの円 $|\zeta-a|=R_1', R_2'$ 上で連続ゆゑ, Ahlfors の

補題 24.3 から $f_1(z), f_2(z)$ はそれぞれ領域 $|z-a| \neq R_1',$

$|z-a| \neq R_2'$ で正則であつて,

$$f_2^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R_2'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta,$$

$$f_1^{(n)}(z) = -\frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R_1'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$



Step 2. $f_2(z)$ は, Taylor 展開定理 32.1 により a を中心に円 $|z - a| < R_2'$ で

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n = \frac{f_2^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R_2'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad \left(= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R_2'} \frac{f_2(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right)$$

と展開され, この円内で絶対かつ compact 一様に収束する. ここで c_n の積分路を, Cauchy の積分定理 20.2 によつて, 次の様書き換へることができる:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n \geq 0, R_1 < r < R_2).$$

Step 3. ($f_1(z)$ について) まづ $R_1' = |\zeta - a| < |z - a|$ なる ζ と z に対して,

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{f(\zeta)}{(z - a) \left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n f(\zeta)}{(z - a)^{n+1}}$$

と等比級数に展開される. これを ζ についての函数項級数とみる. 円 $|\zeta - a| = R_1'$ 上での $|f(\zeta)|$ の最大値を M とすれば, $\left| \frac{(\zeta - a)^n f(\zeta)}{(z - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{|z - a|} \left(\frac{R_1'}{|z - a|} \right)^n$ であるから, この級数は円 $|\zeta - a| = R_1'$ において一様収束する. 従つて 29.11 により項別積分され

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R_1'} \frac{(\zeta - a)^n f(\zeta)}{(z - a)^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \int_{|\zeta - a| = R_1'} f(\zeta) (\zeta - a)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n-1}}{(z - a)^{n+1}} \quad \left(c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R_1'} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta \right) \end{aligned}$$

となるが, これは上の不等式から $|z - a| < R_1'$ で絶対かつ compact 一様に収束する. この右辺の被積分函数は $R_1 < |\zeta - a| < R_2$ で正則であり, $R_1 < r < R_2$ であるから, 再び Cauchy の積分定理 22.1 によつて c_{-n} が次の様書き換へられる:

$$c_{-n} = \int_{|\zeta - a| = r} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta \quad (R_1 < r < R_2).$$

Step 4. 以上で $R_1' < |z - a| < R_2'$ において所望の冪級数展開が得られたが, R_1' と R_2' の任意性から $R_1 < |z - a| < R_2$ においての展開が得られたことになる.

Step 5. 一意性. 上の展開とは別に, 係数 b_n を持つ冪級数展開が存在したとせよ:

$$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \frac{c_{-1}}{z - a} + c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots \\ &= \cdots + \frac{b_{-2}}{(z - a)^2} + \frac{b_{-1}}{z - a} + b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$R_1 < r < R_2$ なる任意の定数 r と任意の $n \in \mathbb{Z}$ について, この両辺を $(z - a)^{n+1}$ で割つた級数は円 $|z - a| = r$ 上で一様収束するから 29.11 により, この円周上に関して項別積分できるが 18.14 によつて, $c_n = b_n$ を得る. n を動かせば, 上記の 2 つの Laurent 級数が一致することがわかる. \square

例題 35.4 函数 $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$ を次の各領域で $z=0$ を中心として Laurent 級数に展開せよ.

(1) $|z| < 1$. (2) $1 < |z| < 2$. (3) $2 < |z|$.

解答 始めに準備として $f(z)$ を部分分数に分解しておく:

$$f(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+2} \right).$$

(1) $|z| < 1$ において $f(z)$ は正則である. 一方

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+\frac{z}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ -(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{z}{2} + \left(-\frac{z}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{z}{2}\right)^n + \cdots \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{8}z^3 + \cdots + \frac{-1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} z^n + \cdots \end{aligned}$$

Laurent 展開の一意性から, これが求める展開である.

(2) $1 < |z| < 2$ においては $|\frac{1}{z}| < 1$ に注意して

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1+\frac{z}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{z}{2} + \left(-\frac{z}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{z}{2}\right)^n + \cdots \right) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{3z} + \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{3z^4} + \cdots + \frac{1}{3z^{n+1}} + \cdots \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{z}{2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{z}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{3} \left(-\frac{z}{2}\right)^n + \cdots \right) \\ &= \cdots + \frac{1}{3z^4} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{3} - \frac{z}{3 \cdot 2} + \frac{z^2}{3 \cdot 2^2} - \cdots \end{aligned}$$

(3) $|z| > 2$ においては $|\frac{1}{z}| < 1$, $|\frac{2}{z}| < 1$ に注意して

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{\frac{2}{z}}{1+\frac{z}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \left(-\frac{2}{z}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{2}{z}\right)^n + \cdots \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right) + \left(\frac{2}{z} - \frac{2^2}{z^2} + \frac{2^3}{z^3} - \cdots \right) \right\} \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} - \cdots + \frac{1 - (-2)^n}{3} \frac{1}{z^n} + \cdots \end{aligned}$$

となる. □

例題 35.5 函数 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ を円環領域 $1 < |z+1| < 2$ で Laurent 展開せよ.

解答 まず, $f(z)$ を部分分数に分解する. 未定係数 A, B, C を用意して,

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

とにおいて, 求めると $A = C = 1, B = -1$ がわかる. さて, まず

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{-1+(z+1)} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n, \\ \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{-2+(z+1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

次にこの第 2 式を項別微分 (29.10 または 31.1) すると

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{z+1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n.$$

以上をまとめて

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}}\right) (z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{n+3}{2^{n+2}}\right) (z+1)^n$$

を得る. □

例 35.6 $|z+1| > 2$ において Laurent 展開

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1} \frac{1}{1-\frac{2}{z+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z+1)^{-n+1} = \sum_{n=-1}^{\infty} 2^{n+1} (z+1)^{-n}$$

があるが, これの両辺を項別微分微分定理 29.10 を使つて微分すれば

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=-1}^{\infty} 2^{n+1} n (z+1)^{-n-1}$$

となる.

例 35.7 函数 $\cot z$ は (34.3) で述べた Bernoulli 数 B_n を使つて $z=0$ を中心に以下の様に Laurent 展開される:

$$\cot z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 + \dots.$$

この展開については 35.13 に問題として挙げておいた. いま, $\cot z - \frac{1}{z}$ が定義されてみない $z=0$ のときを 0 と定義すると, この新たな函数は原点で正則となることがわかる. そこでこの新函数 $\cot z - \frac{1}{z}$ に 33.10 などを使つて, その収束領域は $0 < |z| < \frac{\pi}{2}$ であることが示される.

注意 35.8 $\cot z$ は

$$\cot z = \cdots + \frac{1}{z+3\pi} + \frac{1}{z+2\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \cdots$$

$$\left(= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

なる展開（部分分数分解の一般化）も有する.

例 35.9 函数 $\frac{1}{e^z - 1 - z}$ を $z = 0$ を中心に Laurent 展開すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^z - 1 - z} &= \frac{1}{\frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots} \\ &= \frac{2}{z^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{12}z^2 + \cdots} \\ &= \frac{2}{z^2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{12}z^2 + \cdots \right) + \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{12}z^2 + \cdots \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{12}z^2 + \cdots \right)^3 + \cdots \right) \\ &= \frac{2}{z^2} - \frac{2}{3z} + \frac{1}{18} + \frac{1}{270}z - \frac{1}{3240}z^2 - \frac{1}{13608}z^3 - \frac{1}{2041200}z^4 + \cdots \end{aligned}$$

となる.

この展開は pari/GP (paridroid, SageMath) だと

```
> 1/(exp(z)-1-z)+O(x^5)
```

などとすれば計算される.

演習問題

35.10 函数 $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ を次の各領域で冪級数に展開せよ.

[= [sy], p.142, 問 11(1)(2) ◎]

- (1) $|z| < 1$ で $z = 0$ を中心として.
- (2) $0 < |z+1| < 2$ において $z = -1$ を中心として.

35.11 函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ を次の各領域で $z = 0$ を中心に冪級数に展開せよ.

[= [sy], p.142 問 12(1)(2)(3)]

- (1) $|z| < 1$.
- (2) $1 < |z| < 2$.
- (3) $2 < |z|$.

35.12 次の函数を指定された範囲で Laurent 展開せよ.

[= [sy], p.145, 章末問題 2 (1)(2)]

- (1) $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$, $0 < |z|$.
- (2) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, $1 < |z-2| < 3$.

35.13 次の Laurent 展開が正しいことを示せ:

$$\cot z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

また, この展開の収束半径を求めよ.

35.14 次を示せ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1) B_{2n}}{B_{2n+2}} = -2\pi^2.$$

§ 36. 孤立特異点の分類

33.6 で 特異点 を定義したが, その特別なものについて調べてみる.

定義 36.1 $a \in \mathbb{C}$ を定点とする. a が函数 $f(z)$ の特異点であるとせよ. もし, 定数 $r > 0$ が存在して, 円環領域 $\{z; 0 < |z - a| < r\}$ で $f(z)$ が正則であるならば, a は $f(z)$ の 孤立特異点 と呼ばれる.

以下, 与へられた函数 $f(z)$ の孤立特異点 a に対し, a を中心とした Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

と書く. この展開のうち, 負幂の項からなる部分を

$$f^-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

とにおいて, これを $f(z)$ の a における Laurent 展開の 主要部 と呼ぶ. 以下では, 主要部の様子に基づき, 孤立特異点の分類を行ふ.

除去可能特異点. 主要部が 0 であるとき, 点 a は 除去可能特異点 と呼ばれる. この場合は $f(a) = c_0$ と定義する (し直す) ことで $f(z)$ は a において正則となる.

極. 主要部が 0 でなく, かつ有限個の項からなるとき, 即ち, ある $k \in \mathbb{N}$ があつて

$$f^-(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} \quad (c_{-k} \neq 0)$$

の形であるとき, 点 a は $f(z)$ の 位数 k の極, 或いは k 位の極 であるといはれる.

真性特異点. 主要部に無限に 0 でない項が存在するとき, a は $f(z)$ の 真性特異点 であるといはれる.

命題 36.2 $a \in \mathbb{C}$ と $R > 0$ を定数とする. 領域 $0 < |z - a| < R$ で正則な函数 $f(z)$ が a で極も持つためには, $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z) = 0$$

となり, かつ, その様な n の最小値 n_0 が 2 以上であることが必要十分である. この場合 a は位数 $n_0 - 1$ 位の極である.

定理 36.3 (孤立特異点に関する Riemann の定理) a を定数とする. 函数 $f(z)$ が領域 $D = \{z; 0 < |z - a| < R\}$ で正則かつ有界であるとする. このとき $z = a$ は $f(z)$ の除去可能な特異点である.

証明 $0 < r < R$ なる r を固定する. Laurent 展開定理 35.3 より $n \in \mathbb{N}$ について

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta.$$

仮定より, 定数 $M > 0$ があつて $z \in D$ ならば $|f(z)| \leq M$ である. よつて

$$\begin{aligned} |c_{-n}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - a| = r} |f(\zeta)| |\zeta - a|^{n-1} |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} M r^{n-1} \cdot 2\pi r = M r^n. \end{aligned}$$

ここで $r \rightarrow 0$ とすることで $|c_{-n}| = 0$ がわかる. つまり $f(z)$ の a を中心とした Laurent 展開の主要部は 0 である. つまり a は $f(z)$ の除去可能な特異点である. \square

演習問題

36.4 次の関数について, すべての特異点とその種類を特定せよ. [= [sy], p.144, 問 13 (1)(2)]

$$(1) f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}. \quad (2) f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}.$$

36.5 次の関数は $z=0$ を孤立特異点を持つことを示し, $z=0$ を中心として Laurent 展開し, さらに孤立特異点 $z=0$ の種別を記せ. [= [sy], p.145, 章末問題 4(1)(2)(3)]

$$(1) \frac{1 - \cos z}{z}. \quad (2) \frac{e^{z^2}}{z^3}. \quad (3) \frac{e^{\frac{1}{z}} + e^{-\frac{1}{z}}}{2z}.$$

36.6 次の級数が収束する様な z の集合を求めよ: [= [sy], p.145, 章末問題 1 改題]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

補足: この函数項級数は収束円の周上の至るところ収束する. 従つて, 33.9 によれば, 円周上に存在する特異点は極でも真性特異点でもない. その位置と「形状」を特定できるか.

36.7 a を定数とする. $f(z)$ は $0 < |z-a| < R$ で定義された定数ではない正則函数であるとする. [= [sy], p.145, 章末問題 5(1)(2)], [= [TK], p.61, 定理 68]

(1) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0$ ならば, a は除去可能特異点である. そこで $f(a) = 0$ と定義すれば $f(z)$ は a で正則となつて a は $f(z)$ の零点である. また $n \in \mathbb{N}$, および, $|z-a| < R$ で正則かつ $g(a) \neq 0$ なる函数 $g(z)$ が存在して,

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \quad (0 < |z-a| < R)$$

となる. 以上を証明せよ. この n を零点 a の 位数, あるいは a は n 位の零点 であるなどと称する.

(2) $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ ならば $z = a$ は $f(z)$ の極であることを示せ.

(3) a が $f(z)$ の真性特異点であるためには, 次の様な数列 $\{a_n\}$ が存在することが必要十分であることを証明せよ. 任意の $\beta \in \mathbb{C}$ および $\beta = \infty$ について,

$$0 < |a_n - a| < R, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \beta.$$

36.8 次の問に答へよ. [= [sy], p.145, 章末問題 6 (1)(2)]

(1) $f(z)$ が $|z| > R$ で正則ならば, $F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ は $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$ で正則であることを示せ.

(2) $f(z)$ の $z = \infty$ における特異点を $F(\zeta)$ が $\zeta = 0$ で特異点であるか否かで定義し, さらに分類も同様に定義する. 次の函数 $f(z)$ が $z = \infty$ において特異点を持つか否かを調べ, さらにその分類を記せ.

$$(a) f(z) = \frac{(z+3i)^5}{(z^2-2z+5)^2}. \quad (b) f(z) = e^{z^2}. \quad (c) f(z) = \sin \frac{1}{z^2}.$$

第5章 留数とその応用

§ 37. 留数の定義と求め方

定義 37.1 $r > 0$ を定数とする. 函数 $f(z)$ は a を孤立特異点を持ち, 円環領域 $0 < |z - a| < r$ において正則であるとする. $0 < \rho < r$ なる定数 ρ について,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

を $f(z)$ の a における 留数 と呼び, 記号

$$\operatorname{Res}(a, f) = \operatorname{Res}(a) = \operatorname{Res}_{z=a} f(z)$$

などで表す. Cauchy の積分定理 20.2 により, これは ρ の選び方に依らない.

この値を知れば, 微分積分学の方法では得られない多くの定積分の値が求められる.

命題 37.2 いま $f(z)$ の $z = a$ における Laurent 展開を

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

とすると,

$$\operatorname{Res}(a, f) = c_{-1}$$

である.

証明 35.3 からわかる. □

例題 37.3 函数 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ の $z = 0$ における留数を求めよ.

解答 $f(z)$ の $z = 0$ における Laurent 展開は

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \cdots \end{aligned}$$

であるから

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

となる. □

命題 37.4 領域 $0 < |z - a| < r$ で定義された函数 $f(z)$ が a を k 位の極に持つとき, 次式が成り立つ:

$$\operatorname{Res}(a, f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z).$$

証明 仮定より $f(z)$ の $z = a$ における Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots$$

と書けるから,

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + c_0(z-a)^k + c_1(z-a)^{k+1} + \cdots.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z) &= (k-1)! c_{-1} + (k)_{k-1} c_0 (z-a) \\ &\quad + (k+1)_{k-1} c_1 (z-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

となり, 所望の等式を得る. ここに (推論には不要であるが) 記法

$$(u)_n = u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)$$

を用いた. □

例題 37.5 $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+2)}$ の孤立特異点における留数を求めよ. (= [sy], p.148, 例 2)

解答 特異点は -1 と -2 であり, どちらも極であつて, 位数はそれぞれ 2 と 1 である. よつて, 留数は

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(-1, f) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} (z+1)^2 f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \frac{1}{z+2} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{(z+2)^2} = -1, \\ \operatorname{Res}(-2, f) &= \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{(z+1)^2} = 1 \end{aligned}$$

である. □

注意 37.6 以後, 説明を簡単にするために, いちいち断らないが, 除去可能特異点はその近傍にまで定義域を拡張して, その点では正則と見做すことが多い. また, 正則な点の留数も考へて 0 として議論することがあるかも知れないが, 混乱はない筈である.

例題 37.7 $r > 0$ を定数として, $h(z)$ を $|z - a| < r$ で正則な函数とせよ. このとき (37.6 を前提として) a が $h(z)$ の 1 位の零点 (36.7(1)) であることと, $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ で定められる函数 $f(z)$ が a を 1 位の極に持つことは同値である. さらに, $\text{Res}(a, f) = \frac{1}{h'(a)}$ である. これらのことを証明せよ.

解答 (前者 \Rightarrow 後者) 36.7(1) により $h(z) = (z - a)g(z)$ と書ける. 但し $g(z)$ は $|z - a| < r$ で正則で $g(a) \neq 0$ である. このとき

$$g(z) = c_0 + c_1(z - a) + \cdots, \quad (c_0 \neq 0)$$

とその展開を表記すれば, $h'(a) = c_0$ であつて,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{c_0(z - a) + c_1(z - a)^2 + \cdots} = \frac{1}{c_0(z - a)} \frac{1}{1 + \frac{c_1}{c_0}(z - a) + \cdots} \\ &= \frac{1}{c_0(z - a)} \left(1 + \left(\frac{c_1}{c_0}(z - a) + \cdots \right) + \left(\frac{c_1}{c_0}(z - a) + \cdots \right)^2 + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{c_0(z - a)} + \frac{c_1}{c_0^2} + \left(\frac{c_2}{c_0^2} + \frac{c_1^2}{c_0^3} \right) (z - a) + \cdots \end{aligned}$$

と展開される. 収束半径は $h(z)$ の a から, a に最も近い他の零点までの距離である. 収束性の議論の詳細は省略する. この結果から

$$\text{Res}(a, f) = \frac{1}{c_0} = \frac{1}{h'(a)}$$

となつて所望の結果が得られる. (後者 \Rightarrow 前者) の証明は問としておく. \square

問 37.8 37.7 の (後者 \Rightarrow 前者) の部分の証明を行へ.

演習問題

37.9 次の函数の $z = 0$ における留数を求めよ. [= [sy], p.147, 問 1 (1)(2)(3)]

$$(1) z^2 e^{-\frac{1}{z}}, \quad (2) \frac{e^{iz}}{z^4}, \quad (3) z^2 \sin \frac{1}{z}.$$

37.10 次の函数の孤立特異点に対して, そこでの留数を求めよ.

[= [sy], p.148, 問 2 (1)(2)(3)]

$$(1) \frac{2z^2 + 1}{z - 1}, \quad (2) \frac{2z^2 + 1}{(z - 1)^2}, \quad (3) \frac{2z^2 + 1}{(z - 1)^3}.$$

37.11 $f(z) = \frac{1}{z^5 - 1}$ の $z = 1$ における留数を求めよ. [= [sy], p.149, 問 3]

§ 38. 留数定理

定理 38.1 (留数定理) 函数 $f(z)$ は領域 D で孤立特異点 a_1, \dots, a_m を除いたすべての点で正則であるとする. このとき D 内の 0 に homology 同値かつ a_1, \dots, a_m のどれも通らない閉曲線 C について

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^m n(C, a_j) \operatorname{Res}(a_j, f)$$

が成り立つ. ここに $n(C, a_j)$ は 21.1 で定義した絡数である.

証明 各点 a_j を中心とし, C が構成する領域に含まれる小円 $K_j : |z - a_j| = r_j$ をとれば,

$$C - \sum_{j=1}^m n(C, a_j) K_j$$

は領域 $D - \{a_1, \dots, a_m\}$ において 0 に homology 同値であるから, Cauchy の積分定理の一般化 22.1 によつて

$$\int_{C - \sum_{j=1}^m n(C, a_j) K_j} f(z) dz = 0.$$

これより

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C f(z) dz - \sum_{j=1}^m n(C, a_j) \int_{K_j} f(z) dz \\ &= \int_C f(z) dz - \sum_{j=1}^m n(C, a_j) 2\pi i \operatorname{Res}(a_j, f) \end{aligned}$$

を得て, 証明が完了する. \square

例題 38.2 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-4)}$ について, 次の積分を求めよ.

$$\int_{|z-1|=2} f(z) dz.$$

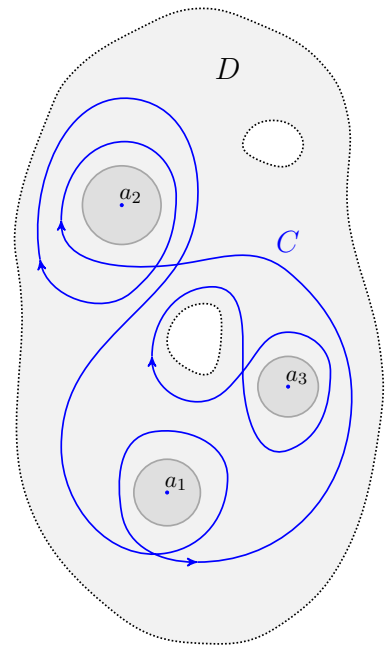
解答 $f(z)$ の特異点は 0, 1, 4 のみである. 36.2 によつて, これらはすべて 1 位の極である. 円 $|z-1|=2$ 上には, これらの極はなく, 内部にあるのは 0, 1 のみであり,

$$\operatorname{Res}(0, f) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{Res}(1, f) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z(z-4)} = -\frac{1}{3}.$$

従つて留数定理 38.1 により

$$(\text{与式}) = 2\pi i (\operatorname{Res}(0, f) + \operatorname{Res}(1, f)) = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{\pi i}{6}$$

となる. \square



演習問題

38.3 留数定理を用いて, 次の積分の値を求めよ. [= [sy], p.150, 問 4 (1) (2)]

$$(1) \int_{|z-1|=2} \frac{1}{z^2(z^2-4)} dz. \quad \text{修正済} \quad (2) \int_{|z-i|=1} \frac{1}{z^4-1} dz.$$

38.4 留数定理を用いて次の積分を計算せよ. 但し a は定数である. [= [sy], p.158, 章末問題 1 (1) (2) (3)]

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{2z+1}{z(z-3)} dz. \quad (2) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{e^{az}}{z^2+1} dz. \quad (3) \int_{|z|=2} \frac{e^{az}}{(z^2+1)^2} dz.$$

38.5 4 点 $1-i, 1+i, -1+i, -1-i$ を頂点とする正方形の反時計廻りの周を C とするとき, 次の積分を求めよ. [= [sy], p.158, 章末問題 2 (1) (2)]

$$(1) \int_C \frac{z+1}{z(2z+1)(z-3)} dz. \quad (2) \int_C \frac{e^z}{z(2z^2+1)} dz.$$

§ 39. 留数定理の実数函数定積分への応用

微分積分の範囲ではほとんどの定積分は、被積分函数 $f(x)$ の原始函数 $F(x)$ を求めて、公式

$$(39.1) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

によつて計算してみた。しかし例へば

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^4}{\cos x} dx$$

の様な定積分の被積分函数の原始函数は初等超越函数（三角函数, 逆三角函数, 指数函数, 対数函数やその合成函数など）までの範囲にはなく, (39.1) を適用できない。

しかるに留数定理 38.1 を利用することで、この様な定積分の値を精確に求めることができる。ここでは、実際の計算を例を使いながら述べていく。

以下では f を 1 変数または 2 変数の有理式, α を実定数として、次の様な定積分の計算方法を述べる：

実数函数の定積分計算への応用

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx.$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha f(x) dx.$$

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx \quad (\text{フレネル積分}).$$

39.1. 三角関数の有理関数の積分計算

$f(X, Y)$ が X と Y の \mathbb{C} 係数の有理式の時、定積分

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

を計算するには、 $e^{i\theta} = z$ とおいて

$$I = \int_{|z|=1} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} Q(z) dz$$

といふ具合に、 z の有理関数 $Q(z)$ の積分に帰着させるとよい。

例題 39.2 次の定積分 I の値を求めよ： [= [sy], p.151, 例題 2]

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\theta} d\theta.$$

解答 $e^{i\theta} = z$ とおくと $\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ であるから

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{3+z+z^{-1}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+3z+1} dz.$$

ここで、計算し易くするために、被積分関数の分母 $z^2+3z+1=0$ の 2 つの解を α, β とおく。 $f(z)$ の特異点は α と β の 2 つであり、どちらも 1 位の極である。 $\alpha\beta=1$ であるから $|\alpha| < 1$, $|\beta| > 1$ としてよい。つまり $\alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ である。いま $f(z) = \frac{1}{z^2+3z+1}$ とおくと、この関数の α における留数は

$$\begin{aligned} \text{Res}(\alpha, f) &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \frac{1}{z^2 + 3z + 1} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{1}{z - \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2} - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

以上から

$$I = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

である。 □

問 39.3 次の積分の値を求めよ。 [= [sy], p.151, 問 5 (1)(2) ◎]

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3+2\cos\theta)^2} d\theta.$

(2) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2} d\theta \quad (0 < a < 1).$

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta} d\theta \quad (a > 0, b > 0, a \neq b).$

39.2. 有理函数の無限区間での積分計算

$f(x)$ が x の有理函数のときの定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

の値は次の様に求められる. 上半平面 $\{z \mid \operatorname{im} z > 0\}$ 内にある $f(z)$ の極の全てを a_1, a_2, \dots, a_n とする. これらの極をすべて含む様な, 原点を中心とした十分大きな円板 $|z| < R$ を選ぶ. 領域 $D = \{z \mid |z| < R, \operatorname{im} z > 0\}$ の通常の向きの周囲を C とし, そのうち, 実軸部分を I_R , それ以外の円弧の部分を C_R と記す.

このとき 38.1 から,

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{I_R} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(a_1, f) + \operatorname{Res}(a_2, f) + \dots + \operatorname{Res}(a_n, f)).$$

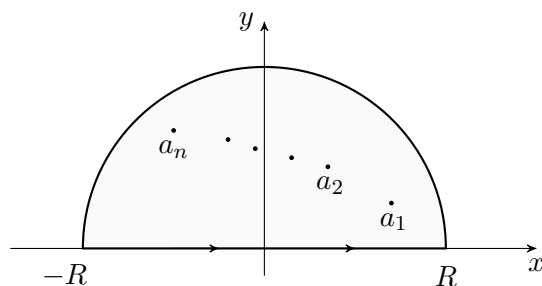
ここで $R \rightarrow \infty$ のとき, $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$ ならば

$$\int_{I_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

となるので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i (\operatorname{Res}(a_1, f) + \operatorname{Res}(a_2, f) + \dots + \operatorname{Res}(a_n, f))$$

と値が求められる.



例題 39.4 次の定積分 I の値を求めよ: [= [sy], p.152, 例題 3]

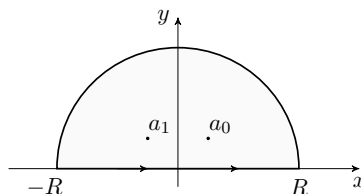
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

解答 被積分函数を複素函数に延長して $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ とおく. 積分路やそれが囲む領域等について, 上の記号を用いる.

全平面に存在する $f(z)$ の特異点は $a_0 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $a_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $\bar{a}_0 = e^{-\frac{\pi i}{4}}$, $\bar{a}_1 = e^{-\frac{3\pi i}{4}}$ の 4 つであり, どれも 1 位の極であつて,

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-a_0)(z-a_1)(z-\bar{a}_0)(z-\bar{a}_1)}.$$

これらの 4 つの極が $\{z; |z| < R\}$ に含まれる様に R を選ぶ. このとき 4 つの極のうち D 内に存在するのは a_0 と a_1 の 2 つだけであり,



$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(a_0, f(z)) &= \lim_{z \rightarrow a_0} (z-a_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow a_0} \frac{1}{(z-a_1)(z-\bar{a}_0)(z-\bar{a}_1)} \\ &= \frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-\bar{a}_0)(a_0-\bar{a}_1)} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{Res}(a_1, f(z)) &= \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

である. Cauchy の積分定理 20.2 から

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} \frac{1}{1+z^4} dz \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz + 2\pi i (\operatorname{Res}(a_0, f(z)) + \operatorname{Res}(a_1, f(z))) \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz + \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

しかるに

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \left| \frac{1}{1+z^4} \right| |dz| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{R^4-1} \rightarrow 0$$

であるから $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ である. □

問 39.5 次の定積分の値を求めよ. [= [sy], p.153, 問 6 (1)(2)(3) ◎]

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx.$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx.$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^2(b^2+x^2)^2} dx \quad (a > 0, b > 0, a \neq b).$

39.3. 有理関数と三角関数の積の無限区間での積分計算

$f(x)$ が x の有理関数で $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき, 定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx, \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx$$

の値も第 39.2 小節と同じ方法で求められる. $g(z) = f(z) e^{i\alpha z}$ とおく. 前小節の記号で,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} g(z) \, dz = I + iJ$$

であるから, この左辺の値が前小節の様に計算できれば, その実部と虚部を取り出すことで所望の値が求まる.

例題 39.6 $m > 0$ を定数とする. 次の定積分 I の値を求めよ: [= [sy], p.153, 例題 4]

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} \, dx.$$

解答 39.4 と同じ積分路を積分するので, 同じ記号 D, R, C_R, I_R を用いる. いま

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{1+z^2}.$$

とおくと, 全平面において $f(z)$ の特異点は $i, -i$ の 2 点で, ともに 1 位の極 である. 領域 D が i を含む様に半径 R を大きくとれば,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) \, dz \right| &\leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{-mR \sin \theta}}{R^2 - 1} \right| \left| \frac{dz}{d\theta} \right| |d\theta| \quad (z = Re^{i\theta}) \\ &= \frac{2R}{R^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \theta} \, d\theta \leq \frac{2R}{R^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} mR \theta} \, d\theta \quad (\because \sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta) \\ &= \frac{\pi}{m(R^2 - 1)} (1 - e^{-mR}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

このことと, 奇関数の積分ゆゑの $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{1+x^2} \, dx = 0$ とから,

$$\int_{I_R} f(z) \, dz + \int_{C_R} f(z) \, dz \xrightarrow{\lim_{R \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx + i \sin mx}{1+x^2} \, dx + 0 = 2I.$$

また, 留数定理 38.1 から

$$\begin{aligned} \int_{I_R} f(z) \, dz + \int_{C_R} f(z) \, dz &= \int_{I_R + C_R} f(z) \, dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(i, f) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{imz}}{z + i} = \pi e^{-m}. \end{aligned}$$

以上を合はせれば $I = \frac{\pi}{2e^m}$ と求められる. \square

問 39.7 次の定積分の値を求めよ. [= [sy], p.154, 問 7 (1) (2) \triangle]

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} \, dx.$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} \, dx.$$

39.4. 有理関数と一般冪乗単項式の積の無限区間での積分計算

整数でない実定数 α と有理関数 $f(x)$ に対し、定積分

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx$$

の値を求めるには以下の様にする. 全平面上の $z^{\alpha} f(z)$ の極の全体を a_1, a_2, \dots, a_n とせよ. 定数 $\rho > 0$ を十分小さく選び, 定数 $R > 0$ を十分小さく選ぶことで領域

$$D = \{z; \rho < |z| < R, z \neq 0\}$$

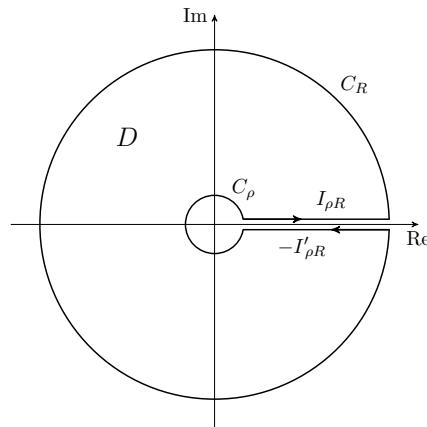
がこれらの極を全て含む様になる. D の (正の向き) の周囲を C とし, C の内で

- $|z| = R$ の部分を C_R ,
- $|z| = \rho$ の部分を $-C_{\rho}$,
- 区間 $[\rho, R]$ 上で原点から遠ざかる路を $I_{\rho R}$,
- 同じく, 原点に向かふ方を $-I'_{\rho R}$, と記す:

$$C = I_{\rho R} + C_R - C_{\rho} - I'_{\rho R}.$$

このとき, 留数定理 38.1 から

$$\begin{aligned} \int_C z^{\alpha} f(z) dz &= \int_{I_{\rho R}} z^{\alpha} f(z) dz + \int_{C_R} z^{\alpha} f(z) dz + \int_{-I'_{\rho R}} z^{\alpha} f(z) dz + \int_{-C_{\rho}} z^{\alpha} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(a_j, z^{\alpha} f(z)). \end{aligned}$$



いま x の $I_{\rho R}$ 上での偏角を 0 にとれば, これの $I'_{\rho R}$ 上での偏角は 2π になり,

$$\begin{aligned} \int_{I_{\rho R}} z^{\alpha} f(z) dz &= \int_{\rho}^R x^{\alpha} f(x) dx, \\ \int_{-I'_{\rho R}} z^{\alpha} f(z) dz &= -e^{2\pi i \alpha} \int_{\rho}^R x^{\alpha} f(x) dx \end{aligned}$$

となる. ここで $\alpha \notin \mathbb{Z}$ より $1 - e^{2\pi i \alpha} \neq 0$ であることに注意されたい. いま, もし

$$\begin{aligned} \int_{C_R} z^{\alpha} f(z) dz &\longrightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty), \\ \int_{C_{\rho}} z^{\alpha} f(z) dz &\longrightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0) \end{aligned}$$

となつてゐて, かつ, すべての留数が計算できるならば, α が整数でないことを使つて, 所望の積分値が求まる:

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{j=1}^n \text{Res}(a_j, z^{\alpha} f(z))$$

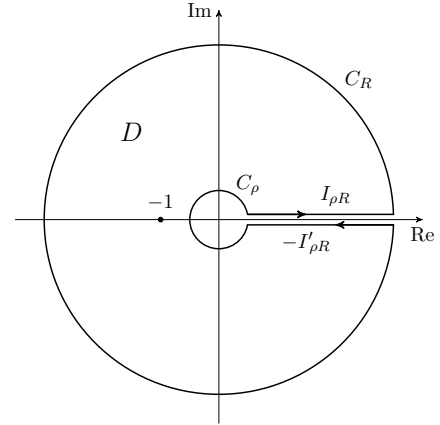
が得られる.

例題 39.8 α を $0 < \alpha < 1$ なる定数とする. 次の定積分 I の値を求めよ:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx. \quad [= [sy], p.155, \text{例題 5}]$$

解答 前 page に述べた方法で計算するので, 領域 D や積分路 $C = \partial D$, C_R , C_ρ , $I_{\rho R}$, $I'_{\rho R}$ などの記号はそのまま使用する. $\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ の D 内の特異点は $z = -1$ のみで, それは 位数 1 の極 である. また留数は

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(-1, \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} z^{\alpha-1} \\ &= (-1)^{\alpha-1} \\ &= e^{\pi i(\alpha-1)} \\ &= -e^{\pi i \alpha} \end{aligned}$$



である. また, C_R , C_ρ 上の積分については, それぞれ $z = Re^{i\theta}$, $z = \rho e^{i\theta}$ とおいて,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{R^{\alpha-1}}{1+Re^{i\theta}} \right| R d\theta \leq \frac{2\pi R^\alpha}{R-1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty), \\ \left| \int_{C_\rho} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\rho^{\alpha-1}}{1+\rho e^{i\theta}} \right| \rho d\theta \leq \frac{2\pi \rho^\alpha}{1-\rho} \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0) \end{aligned}$$

であるから (C_R 上の積分については $0 < \alpha < 1$ も考慮), 留数定理 38.1 から得られる

$$\begin{aligned} \left(\int_C \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right) &= \int_{I_{\rho R}} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz + \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz + \int_{-I'_{\rho R}} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz + \int_{-C_\rho} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(-1, \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right) = -2\pi i e^{\pi i \alpha} \end{aligned}$$

において $R \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + 0 - e^{2\pi i(\alpha-1)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + 0 = -2\pi i e^{\pi i \alpha}.$$

よって

$$I = \frac{2\pi i(-e^{\pi i \alpha})}{1 - e^{2\pi i \alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i \alpha} - e^{-\pi i \alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

を得る. □

問 39.9 次の定積分の値を求めよ. [= [sy], p.156, 問 8 (1) (2) △]

(1) $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^4} dx \quad (0 < \alpha < 4).$

(2) $\int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+2x \cos \beta + x^2} dx \quad (\alpha, \beta \text{ は定数で } |\alpha| < 1, -\pi < \beta < \pi).$

39.5. Fresnel 積分

ここでは Fresnel 積分と呼ばれる次の定積分を計算してみる.

例題 39.10 次の定積分 (Fresnel 積分) の値を求めよ: [= [sy], p.156, 例題 6]

$$I = \int_0^\infty \cos(x^2) dx, \quad J = \int_0^\infty \sin(x^2) dx.$$

解答 領域 $D = \{z; 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < R\}$ の周囲 (標準の向き) を $C = \partial D$ と記し, これを積分路とする積分を考察する. C の円弧の部分を C_R と記し, 実軸上にある部分を I_R , 残りの部分を I'_R と記す: $C = I_R + C_R + I'_R$. 函数 e^{-z^2} は全平面で正則 (整型函数) であるから, Cauchy の積分定理 20.2 によつて

$$(39.11) \quad 0 = \int_C e^{-z^2} dz = \int_{I_R} e^{-z^2} dz + \int_{C_R} e^{-z^2} dz + \int_{I'_R} e^{-z^2} dz.$$

ここで

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{-R^2 e^{2i\theta}} i R e^{i\theta} \right| d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} R e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi \quad (2\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ と置換}) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-\frac{2}{\pi} R^2 \varphi} d\varphi \quad (\because \sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi) \\ &= \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

次に $I'_R: z = r e^{\frac{\pi}{4}i}$ ($0 < r < R$) と表せるので,

$$\begin{aligned} \int_{I'_R} e^{-z^2} dz &= \int_R^0 e^{-ir^2} e^{\frac{\pi}{4}i} dr = -e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^R (\cos(r^2) - i \sin(r^2)) dr \\ &\rightarrow -e^{\frac{\pi}{4}i} (I - iJ) \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

さらに I_R については

$$\int_{I_R} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx \rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (R \rightarrow \infty).$$

ここで, 微分積分で学んだ

$$2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

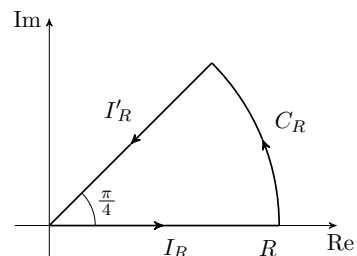
を使つた. 以上により (39.11) は $R \rightarrow \infty$ により

$$0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 + (-e^{\frac{\pi}{4}i} (I - iJ))$$

となる. 実部と虚部を比較することで

$$I = J = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

が得られた. □



問 39.12 次の定積分の値を求めよ. [= [sy], p.157, 問 9 (1)(2)]

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax \, dx \quad (a \text{ は実定数}). \quad (2) \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(t^2) \, dt.$$

演習問題

39.13 $|z| < \infty$ において函数 $f(z)$ は高々有限個の極を持ち, それ以外には孤立特異点を持たない有理型であるとする. さらに定数 $M > 0$ が存在して, 十分大きな $N > 0$ に対して図の様な正方形の周 C_N では

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}$$

が成り立つとする. 以下の間に答へよ. [= [sy], p.158, 章末問題 3 (1) (2)]

(1) N に依らない定数 A が存在して C_N 上で

$$\left| \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right| < A \text{ が成り立つことを示せ.}$$

(2) $f(z)$ のすべての極における, 函数

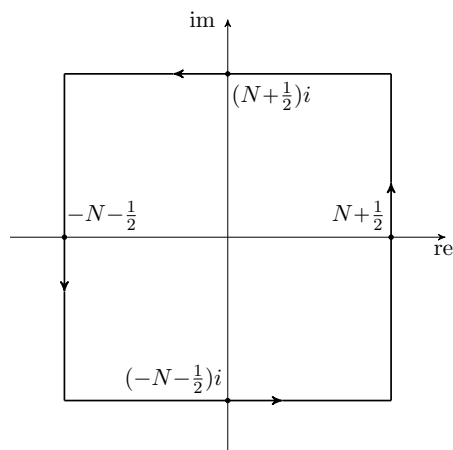
$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} f(z)$$

の留数の和を S とするとき, 留数定理 38.1 を用いて

$$S = - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |f(n)| < \infty}} f(n)$$

となることを示せ. ここに右辺の和は $f(z)$ の極でないすべての整数 n についての和である.

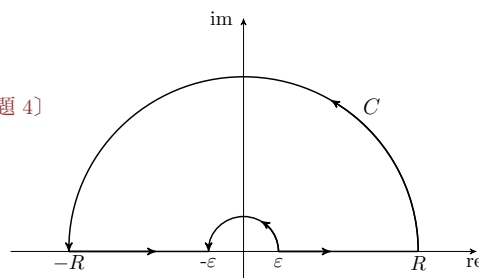
(3) 上の結果を利用して和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の値を求めよ.



39.14 次の定積分の値を求めよ. [= [sy], p.158, 章末問題 4]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

(Hint: $\frac{e^{iz}}{z}$ を右図の閉曲線 C に沿って積分する.)



§ 40. 偏角の原理

定理 40.1 (偏角の原理) 函数 $f(z)$ は領域 D 及びその境界を集合で定義され、そこで有理型とする. また $f(z)$ は ∂D で 0 にならないものとする. $f(z)$ の D 内に有する, すべて零点に渡る位数の和を $\nu(f, D)$ とし, 同じく D 内のすべての極を渡る位数の和を $\mu(f, D)$ と記す. このとき,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \nu(f, D) - \mu(f, D).$$

証明 D における $\frac{f'(z)}{f(z)}$ の特異点は $f(z)$ の零点または極であるから, それら点における $\frac{f'(z)}{f(z)}$ の留数の和が $\nu(f, D) - \mu(f, D)$ であることを示せばよい. いま a を $f(z)$ の零点として, その位数を k とすると

$$f(z) = (z - a)^k g(z)$$

と書ける. ここに $g(z)$ は a の近傍で 0 にならない正則函数である. ゆえに

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

である. ここで $\frac{g'(z)}{g(z)}$ は a の近傍で正則である. よつて

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = k$$

である. 次に b を $f(z)$ の極として, その位数を j とすると

$$f(z) = (z - b)^{-j} h(z)$$

と書ける. ここに $h(z)$ は b の近傍で 0 にならない正則函数である. ゆえに

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-j}{z - b} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

となる. ここで, $\frac{h'(z)}{h(z)}$ は b の近傍で正則である. よつて

$$\operatorname{Res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = -j$$

である. 以上により所望の等式が成り立つことが示された. \square

注意 40.2 40.1 の状況の下で, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \log |f(z)| + i \arg f(z)$ において $\log f(z)$ は ∂D 上の近傍で正則だから

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} d \log f(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} d \arg f(z) dz$$

である. これが偏角の原理の名称の由来である.

定理 40.3 $f(z)$ は z_0 で正則とし, $f(z_0) = w_0$ とする. $z \mapsto f(z) - w_0$ は z_0 で n 位の零点を持つと仮定する. このとき $\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば, 対応して $\delta > 0$ が存在して次が成り立つ:

$|b - w_0| < \delta$ を満たす任意の b に対して, 方程式 $f(z) = b$ は, 円板 $|z - z_0| < \varepsilon$ の中に重複度も込めて丁度 n 個の根を持つ.

証明 [A], p.141 □

系 40.4 定数でない解析函数による開集合の像はまた開集合である.

証明 □

系 40.5 $f(z)$ が z_0 で解析的で $f'(z_0) \neq 0$ ならば $f(z)$ は z_0 のある近傍をある領域の上へ位相的かつ等角に写す.

証明 □

この 40.5 により, 最大値の原理の別証が与えられる. 最大値の原理を述べ換へると

定理 40.6 $f(z)$ は領域 D 上の定数でない正則函数とする. このとき $|f(z)|$ は D において最大値を持たない.

証明 (最大値の原理 25.11 の別証) . $w_0 = f(z_0)$ を D でとられる任意の値とせよ. 40.5 により, ある近傍 $U_\varepsilon(w_0)$ は D の像に含まれる. この近傍の中には絶対値が $|w_0|$ より大きい点が含まれるから, $|f(z_0)|$ が $z \mapsto |f(z)|$ の最大値では有り得ない. □

§ 41. 述べたいことやこの先にあるもの

Riemann 球面での表示,

Riemann 面の例,

$w = z^2$ に対する w 平面での格子線の逆像,

Jensen の公式,

Stirling の公式,

1 次分数変換 (Möbius 写像), 非調和比,

無限積展開,

Poisson の公式,

平均値の性質,

Schwartz の定理,

鏡像の原理,

Γ 函数,

Riemann ζ 函数,

楕円函数.

これらについては [A] にわかり易くまとめてある. Whittaker-Watson も非常に優れた本である.

自然境界 について....

§ 42. Notes

- (1) Ahlfors の補題 24.3 は [sy] p.107, 問 8 に相当するのであるが, その定式化だと使ひ道が激減してしまふ.
- (2) 冪級数の項別微分の可能性を述べた定理 31.1 は一般の正則函数項の級数についての定理 29.10 の特殊な場合ではなるが, 後者が重厚な結果を援用してゐるため, 前者の簡易な証明を入れておいた.
- (3) 流通してゐる 特異点の定義 が判然としなかつたので 33.6 の様に定義した.

索引

あ

Ahlfors の補題	62
位数 (極の)	103
位数 (零点の)	105
一様収束	77
一致の定理 I	93
一致の定理 II	94
円環領域	97

か

開集合	9
解析函数	90
解析的	90
外部	35
下極限	73
各点収束	77
函数列	77
逆向き	34
境界	35
共役	1
共役調和函数	69
極	103
極限函数	77
極限值	13
極限值を持つ	13
曲線	33
近傍	9
区分的に滑らかな曲線	33
Green の定理	45
Goursat の公式	61
Goursat の定理	61
項別積分	87
項別微分	80, 87
Cauchy-Hadamard の定理	84
Cauchy 条件	73
Cauchy の収束判定法	81
Cauchy の積分公式	58
Cauchy の積分表示	58
Cauchy の導函数積分公式	61
Cauchy の評価式	91
Cauchy 列	73
弧長に関する積分	40
孤立特異点	103
孤立特異点に関する Riemann の定理	104

compact 一様収束	77
--------------	----

さ

最大値の原理	67
三角函数	27
C^1 級 (2 変数函数)	44
指数函数	23
指数法則	29
自然境界	123
実数の連続性	73
始点	33
収束円	83
収束する	13
収束半径	83
終点	33
主要部	103
上極限	73
剰余	74
除去可能特異点	94, 103
Jordan 曲線	33
Jordan 閉曲線	33
Jordan 閉曲線定理	35
真性特異点	103
整型函数	65
正項級数	73
正項数列	73
正則	16
正則函数	16
正則点	94
絶対収束	74
全微分可能	20
像	70
像 (曲線の)	34
双曲線函数	27
相対的開集合	9

た

第 n 分枝	26
代数学の基本定理	66
対数主値	25
代数的閉体	66
代数方程式	66
d'Alambert の定理	85
d'Alambert の判定法	76
単一連結	9
単純曲線	33
単純収束	77

端点移動	34	平均値の定理	38
端点変更	34	閉集合	9
単連結	9	閉包	9
調和函数	68	偏角主値	25
定義域変更	34	偏角の原理 (principle of argument)	121
Taylor 展開定理	89	homology 同値	56
等角性	70	ま	
導函数	14	纏数	56
同値 (曲線の)	35	向き	33, 34, 35
同値 (閉曲線の)	35	向きを保った等角性	71
特異点	94	無限多価函数	25
特殊折れ線	53	Morera の定理	65
特殊長方形	53	や	
な		有向曲線	33
内点	9	ら	
内部	9, 35	Laplace 作用素	68
長さ	36	Riemann 面	25
長さを持つ	36	留数	107
滑らか	34	留数定理	110
滑らかな曲線	33	Liouville の定理	65
は		領域	9
微分可能	14	領域 (曲線群が定める)	35
微分係数	14	領域 (曲線群が構成する)	35
複素共役	1	零点	93
複素数	1	連結	9
複素積分	37	連続	13
部分和	74	Laurent 級数	97
分割 data	37	Laurent 展開	97
閉曲線	33	Laurent 展開定理	97

Greek Alphabet

	大文字	小文字	読み	読み	対応する alphabet
1	A	α	alpha	アルファ	a
2	B	β	beta	ベータ	b
3	Γ	γ	gamma	ガンマ	g
4	Δ	δ	delta	デルタ	d
5	E	ε, ϵ	epsilon	イプシロン	e
6	Z	ζ	zeta	ゼータ	z
7	H	η	eta	エータ	\bar{e}
8	Θ	θ, ϑ	theta	テータ, シータ	th
9	I	ι	iota	イオタ	i
10	K	κ	kappa	カッパ	k
11	Λ	λ	lambda	ラムダ	l
12	M	μ	mu	ミュー	m
13	N	ν	nu	ニュー	n
14	Ξ	ξ	xi	クシイ, (グザイ)	x
15	O	o	omicron	オミクロン	o
16	Π	π, ϖ	pi	パイ	p
17	P	ρ, ϱ	rho	ロー	r
18	Σ	σ, ς	sigma	シグマ	s
19	T	τ	tau	タウ	t
20	Υ	υ	upsilon	ウプシロン	u
21	Φ	φ, ϕ	phi	ファイ	ph
22	X	χ	chi	カイ	ch
23	Ψ	ψ	psi	プシイ, プサイ	ps
24	Ω	ω	omega	オメガ	\bar{o}

§ 43. 略解答集

11.7 $|z|$ について. $(0, 0)$ では u, v は偏導函数を持たない. それ以外の点では C-R 関係式が成立しない. $\operatorname{im} z$ については至るところ C-R 関係式が不成立.

11.8

(1) $(0, 0), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. これらの点で $f'(z) = 0, \frac{3^3}{4^2}(-1 + i)$.

(2) $(0, 0)$ 以外の全ての点. $f(z) = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{-x^2 + 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1+i}{z^2}$.

11.9

11.10

11.11

(1) $\operatorname{im} f(z) = 2xy - x + C', f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy - x + C') = z^2 - iz + C$.

(2) $\operatorname{im} f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C', f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} + iC' = \frac{1}{z} + C$.

12.4 $\operatorname{im} z \in \pi i \mathbb{Z}, \operatorname{im} z \in \frac{\pi}{2} + \pi i \mathbb{Z}$.

12.5

(1) $\operatorname{re} e^{3+\frac{5}{2}\pi} = 0, \operatorname{im} e^{3+\frac{5}{2}\pi} = -e^3, |e^{3+\frac{5}{2}\pi}| = e^3, \operatorname{Arg} e^{3+\frac{5}{2}\pi} = -\frac{5}{2}\pi$.

(2) $\operatorname{re} e^{-1+\frac{1}{3}\pi} = \frac{1}{2e}, \operatorname{im} e^{-1+\frac{1}{3}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2e}, |e^{-1+\frac{1}{3}\pi}| = \frac{1}{e}, \operatorname{Arg} e^{-1+\frac{1}{3}\pi} = \frac{\pi}{3}$.

13.6

(1) $\log 3 = \log |3| + \arg 3 = \log 3 + 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z})$

(2) $\log(-e) = \log |-e| + \arg(-e) = 1 + (2n+1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z})$

(3) $\log(1-i) = \log \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z})$

13.7

13.8

13.9

(1) $\operatorname{Log}(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = \log 2 + \frac{7\pi}{4}$.

(2) $\operatorname{Log}(-2 - i2\sqrt{3}) = \log 4 + \frac{4\pi}{3}$.

13.10

18.12

(1) $C_1 : 1 + i, C_2 : 1 - \frac{i}{3}$.

(2) C_1 と C_2 共に $\frac{-2+2i}{3}$.

18.15

C_3, C_4 共に $\frac{-2+2i}{3}$.

20.14

(1) $e^z + 1$ が 0 となるのは $z \in (1 + 2\mathbb{Z})\pi i$ で $\pi > 3$ ゆえ 0.

20.15

(1) 0. (2) $-\frac{\pi i}{2}$. (3) 0. (4) 0. (5) 0. (6) $-\frac{2}{3}\pi$.

23.5

i と $-i$ を共に含むかどうかどちらも含まないとき 0;

i のみ含むとき π ;

$-i$ のみ含むとき $-\pi$;

23.6

(1) 0. (2) 0.

23.7

(1) $\pi i e$. (2) $2\pi i \sin 1$. (3) $\pi i(-2 + e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}})$. (4) $\pi i e^i$. (5) $\frac{(\sqrt{3}-i)\pi}{3}$.

24.5

(1) $-\frac{2}{9}\pi i$. (2) πi . (3) $\pi(e - e^{-1})$.

24.6

(1) $(a - \frac{a^2}{2})e^{-a}$. (2) $\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$. (3) $\frac{1}{24}$.

24.7

(1) 0. (2) $2\pi i \sin 1$. (3) $4\pi i$. (4) $-\frac{2}{3}\pi i$.

(5) 0. ($\frac{1}{z^2(z-2)} = -\frac{1}{4z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4(z-2)}$)

(6) $\frac{2}{3}\pi i$. (7) $(e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} - 2)\pi i$.

24.8

(1) $30\pi e i$. (2) $\frac{\pi e i}{3}$. (3) $-\frac{\pi^5}{12} i$.

24.9

$\sqrt{3}\pi$.

24.10**24.11**

(1) $\frac{2\pi i}{(n-1)!} (e^z)^{(n-1)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$.

(2) $\frac{2\pi i}{(n-1)!} (\cos z)^{(n-1)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cos(z + \frac{(n-1)\pi}{2}) \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cos(\frac{(n-1)\pi}{2}) \Big|_{z=0} = \dots$

$$\frac{\cos(2 + (n-1)\frac{\pi}{2})}{(n-1)!} = \begin{cases} \frac{\cos 2}{(n-1)!} & (n \equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき}) \\ \frac{-\sin 2}{(n-1)!} & (n \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき}) \\ \frac{-\cos 2}{(n-1)!} & (n \equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき}) \\ \frac{\sin 2}{(n-1)!} & (n \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき}) \end{cases}$$

30.9

Cauchy-Hadamard の判定法 28.14(2) を用いた Cauchy-Hadamard の定理 30.5 の別証.

30.14 収束半径を求める問題.

- (1) 1. (2) ∞ . (3) ∞ .

30.15 収束半径を求める問題.

- (1) ∞ . (2) 1. (3) 1. (4) $a > 1$ なら $0 < a \leq 1$ なら 1.

30.16 収束円を求める問題.

- (1) $|z| < 1$. (2) 全平面. (3) $|z| < 1$.

30.17 収束半径を求める問題.

- (1) $\sqrt{5}$. (2) e . (3) $\frac{1}{2}$. (4) $\frac{1}{3}$. (5) e .

32.11 冪級数に展開し収束半径を求める問題.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} (z-i)^n$. 収束半径 1.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n$. 収束半径 $\sqrt{2}$.

32.12 冪級数に展開し収束半径を求める問題.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n$. 収束半径 3.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$. 収束半径 1.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{2^{n+1}} + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right) z^n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6^2} z - \frac{7}{6^3} z^2 - \frac{13}{6^4} z^3 - \dots$. 収束半径 2.

33.9 $f(z)$ が円周 $K: |z-a|=R$ 上の任意の点が正則点であるとして, 矛盾を導く. 円周 $|z-a|=R$ 上の各点での収束半径は正である. いま, この円周を各点の収束円の全体で覆ふと, 円周は compact であるから有限個の点を選んで, それらの点における収束円 (有限個) で覆はれる. これを丁寧に見れば (これらの収束円の任意の 1 つに対し, その周と K の交点を含む別の収束円が存在する.), $\varepsilon > 0$ が存在して, 領域 $r-\varepsilon < |z-a| < r+\varepsilon$ が, この有限個の収束円で覆はれてゐることがわかる. これは, $f(z)$ が $0 < |z-a| < r+\varepsilon$ で正則であることになり, 仮定に反する.

33.10

- 33.11** (1) $\sqrt{3}$. (2) 4. (3) 2π . (4) $\frac{1}{2}$.

35.10

(1) $1 + z^2 + z^4 + \dots$. 32.12(2) を参照されたい.

(2) 部分分数分解して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-(z+1)} + \frac{1}{z+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (z+1)^n \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} 2^{-n-2} (z+1)^n.\end{aligned}$$

38.3

- (1) 積分路の円の内部にある特異点は $0, 2$ のみで, 残りの -2 はその外にある. $\text{Res}(2) = \frac{1}{16}$ ゆえ (与式) $= 2\pi i \cdot \frac{1}{16} = \frac{\pi i}{8}$.
- (2) 与へられた積分の被積分函数 $\frac{1}{z^4-1}$ の特異点は $\pm 1, \pm i$ の 4 つで, いずれも極. これらのうち, 積分路の円の内部にあるのは i のみで, 残りはその外にある. $\text{Res}(i) = \frac{i}{4}$ ゆえ (与式) $= 2\pi i \cdot \frac{i}{4} = -\frac{\pi i}{2}$.

38.4

- (1) $-\frac{2\pi i}{3}$.
- (2) $\sin a$.
- (3) $\frac{\sin a - a \cos a}{2}$.

38.5

- (1) $-\frac{8\pi i}{21}$.
- (2) $2\pi i(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2}})$.

39.3

- (1) $\frac{6\pi}{5\sqrt{5}}$.
- (2) $\frac{2\pi}{1-a^2}$.
- (3) $\frac{2\pi}{ab}$.

39.5

- (1) $\frac{2\pi}{3}$.
- (2) $\frac{5\pi}{12}$.
- (3) $\frac{d}{dz}(z-ai)^2 \frac{1}{(a^2+z^2)^2(b^2+z^2)^2} = \frac{-4iaz-2b^2-6z^2}{(z+ai)^3(b^2+z^2)^3}$ より, $\text{Res}(ai) = \frac{5a^2-b^2}{-4ia^3(b^2-a^2)^3}$.
同様にして, $\text{Res}(bi) = \frac{5b^2-a^2}{-4ib^3(a^2-b^2)^3}$.
(与式) $= 2\pi i(\text{Res}(ai) + \text{Res}(bi)) = \pi \frac{b^5 + 5a^3b^2 - a^5 - 5a^2b^3}{2a^3b^3(b^2-a^2)^3}$.

39.5

- (1) $\frac{\pi}{e}$.
- (2) $\frac{\pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} (\cos \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \frac{1}{\sqrt{2}})$.