

2022 年度 後期 定期試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評 点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	線形代数 2 <small>本題 1 時間, 教科書: Original</small> (§§5.1 - 6.5)	A, B	大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名	
なし	理工学部	数学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。  
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。  
 注意 4. **6** は選択問題である。**6a** **6b** のどちらか 1 問選んで解答せよ。

**1** (20 点) 次の連立 1 次方程式を解け:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

◎ 検算を! (解を代入して成り立つか.)

**2** (15 点)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  の逆行列を簡約化で求めよ。

◎ 検算を! (掛けて  $I$  になるかどうか.)

**3** (15 点)  $A^5 = O$  のとき,  $I - A^2$  が正則であることを, この逆行列を実際に与えることで示せ。(Hint:  $(A^2)^3$  を調べよ.)

学籍番号 (9桁)	氏名

4 (15点) 次の (1), (2) のそれぞれについて, vector 空間  $V$  の部分集合  $W$  が  $V$  の ( $\mathbb{R}$  上の) 部分空間であるか. 理由を付けて答へよ.

(1)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 2 \end{array} \right\}$ .

(2)  $V = \mathbb{R}[x]_3$ ,  $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid (x+1)f'(x) + f(x) = o(x) \}$ .  
但し  $f'(x)$  は  $f(x)$  の導関数,  $o(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$  である.

5 (20点) 次に挙げる  $V$  内の vectors の組に対して次の間に答へよ.

(i) 1 次独立な最大個数  $r$  を求めよ.

(ii)  $r$  個の 1 次独立な vectors を前の方から順に求めよ.

(iii) 他の vectors を (ii) の vectors の 1 次結合で書き表せ.

(1)  $V = \mathbb{R}^4$ ,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(2)  $V = \mathbb{R}[x]_3$ ,

$$f_1(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3,$$

$$f_2(x) = -1 + 3x - 2x^2 + x^3,$$

$$f_3(x) = 7 - 7x + 4x^2 + 3x^3,$$

$$f_4(x) = -1 - 5x + x^3,$$

$$f_5(x) = 7 + 2x + 5x^2 - 2x^3.$$

(理由もきちんと述べること.)

学籍番号 (9桁)	氏名

**6a** (10点)  $V$  が vector 空間で,  $W_1$  と  $W_2$  が  $V$  の部分空間であるとする. このとき,  $W_1 \cup W_2$  が  $V$  の部分空間であるならば,  $W_1 \subset W_2$  または  $W_1 \supset W_2$  であることを示せ.

(Hint: 背理法.  $W_1 \subset W_2$  でも  $W_1 \supset W_2$  でもないとすれば,  $v_1 \in W_1$  かつ  $v_1 \notin W_2$  なる  $v_1$  と,  $v_2 \notin W_1$  かつ  $v_2 \in W_2$  なる  $v_2$  とが存在する.  $v_1 + v_2$  を調べ矛盾を導く.)

**6b** (10点)  $V$  を vector 空間とする.  $u_1, \dots, u_n \in V$  について, このうちの  $n-1$  個からなるどの組も 1 次独立であつたとしても, これら  $n$  個の vectors が 1 次独立とは限らない. これを,  $V = \mathbb{R}^4, n = 4$  について示せ.

**7** (5点) 次の集合  $W$  は vector 空間  $V = \mathbb{R}[x]_3$  の部分空間である.  $W$  の 1 組の基を求め,  $\dim W$  を記せ. 但し  $f'(x)$  は  $f(x)$  の導関数である.

$$W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(-1) = 0, f'(2) = 0\}.$$

★ 採点の都合上, 多項式は昇冪順 ( $a + bx + cx^2 + dx^3$ ) で扱はりたい.



## 記号

$\mathbb{R} \dots$  実数全体のなす体,  $\mathbf{K} \dots$  任意に与へられた体.

以下では常に,  $U$  や  $V$  は体  $\mathbf{K}$  上の vector 空間とする.

### 既習事項のまとめ

- (1) 連立 1 次方程式  $Ax = b$  について  $[A|b]$  をこの連立 1 次方程式の拡大係数行列とよぶ.
- (2) **簡約化による連立 1 次方程式の解法** 与へられた連立 1 次方程式に対し, その拡大係数行列に対して,
  - (i) ある行に 0 ではない定数を掛ける;
  - (ii) 2 つの行を入れ替へる;
  - (iii) ある行に別の行の定数倍を加へる,の操作 (1 回にどれか 1 つ) を何回か行なつて簡約化すれば, いかなる連立 1 次方程式をも解くことができる.
- (3) 集合  $V$  と体  $\mathbf{K}$  について, 和と scalar 倍と呼ばれる演算  $V \times V \rightarrow V$ ,  $\mathbf{K} \times V \rightarrow V$  が定義されてゐて, 和に関して群をなし, 和と scalar 倍について分配法則が成り立ち, さらに, ごく自然な付加的性質が成り立つとき,  $V$  は  $\mathbf{K}$  上の vector 空間 と呼ばれる.
- (4) Vector 空間  $V$  の和に関する単位元を 零 vector と呼んで  $\mathbf{0}$  で表す.
- (5) Vector 空間  $V$  の部分集合  $W$  は,
  - S1.  $\mathbf{0} \in W$ ,
  - S2.  $u, v \in W$  ならば  $u + v \in W$ ,
  - S3.  $c \in \mathbf{K}, u \in W$  ならば  $cu \in W$の 3 つがすべて成り立つとき,  $W$  の 部分空間 と呼ばれる.
- (6)  $u_1, \dots, u_m \in V$  と  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$  について,  $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$  の形の式を  $u_1, \dots, u_m$  の 1 次結合 といひ,  $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = \mathbf{0}$  なる式が成り立つとき, これを  $u_1, \dots, u_m$  の 1 次関係 といふ.
- (7)  $0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n = \mathbf{0}$  はいつでも正しい, これを 自明な 1 次関係 といふ.
- (8)  $u_1, \dots, u_m \in V$  が自明でない 1 次関係しか満たさないうとき, これらは 1 次独立 であるといはれる. 1 また, 自明でない 1 次関係を満たすとき, これらは 1 次従属 であるといはれる.
- (9) **問 6.3.6**  $u_1, u_2, \dots, u_n$  が 1 次独立で,  $u, u_1, u_2, \dots, u_n$  が 1 次従属ならば  $u$  は  $u_1, u_2, \dots, u_n$  の 1 次結合で書ける.
- (10) **補題 6.3.8**  $V$  の vectors の 2 つの組  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  について,
  - (1)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  のどれもが  $u_1, u_2, \dots, u_m$  の 1 次結合で書けて,
  - (2)  $n > m$  であるならば  $v_1, v_2, \dots, v_n$  は 1 次従属である.
- (11) **系 6.3.9**  $V$  の vectors の 2 つの組  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  について,
  - (1)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  のどれもが  $u_1, u_2, \dots, u_m$  の 1 次結合で書けて,
  - (2)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  が 1 次独立ならば  $n \leq m$  である.
- (12)  $V$  の vectors の組  $S$  が与へられたとせよ.  $S$  から選んだ vectors の組が 1 次独立で, それ以外のいかなる  $S$  vector を付け加へても 1 次従属になるとき, その組を  $S$  の最大 1 次独立な組と称し, その組を構成する vectors の個数を  $S$  の最大 1 次独立数とよぶ.
- (13) **命題 6.4.9**  $u_1, \dots, u_m \in V$  を 1 次独立な vectors とし,
$$(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_m)A$$
と書けてゐるとし,  $A = [a_1 \dots a_n]$  とする.  
このとき,  $v_1, \dots, v_n$  と  $a_1, \dots, a_n$  には同じ 1 次関係が成り立つ.
- (14)  $u_1, \dots, u_n \in V$  の 1 次結合の全体は  $V$  の部分空間をなす.  
これを, これらの vectors で生成される部分空間と呼び,  $(u_1, \dots, u_n)$  や  $\mathbf{K}u_1 + \dots + \mathbf{K}u_n$  で表す.
- (15) Vector 空間  $V$  の vectors からなる組  $X$  について, その中に  $r$  個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも  $X$  のどんな  $r+1$  個の vectors も 1 次従属であるとき,  $r$  を  $X$  の最大 1 次独立数と呼ぶ.
- (16) Vector 空間  $V$  を vectors の組とみて, その最大 1 次独立数を与へる集合  $B$  を  $V$  の基または基底といふ.  $r$  を  $V$  の次元と呼んで  $\dim(V)$  または  $\dim V$  と記す.
- (17) **系 6.5.12** Vector 空間  $V$  に属する vectors の組  $\{u_1, \dots, u_n\}$  の最大 1 次独立数を与へる組は, 部分空間  $(u_1, \dots, u_n)$  の基をなす.