実施：2022 年 12 月 22 日 (木) 9:10-10:40, E-101 室

2022 年度　**後期　中間試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	線形代数 2　木曜 1 時限, 教科書：Original　(§§5.1 – 6.4)	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. **5** は選択問題である. **5a** **5b** のどちらか 1 問選んで解答せよ.

1 (20 点) 次の連立 1 次方程式を解け：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

◎ 検算を！　(解を代入して成り立つか.)

2 (15 点) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を簡約化で求めよ.

◎ 検算を！　(掛けて I になるかどうか.)

3 (15 点) $A^5 = O$ のとき, $I + A$ が正則であることを, これの逆行列を実際に与へることで示せ. (Hint : $1 + x^5$ の因数分解)

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{4}$ (15 点) 次の (1), (2) のそれぞれについて, vector 空間 V の部分集合 W が V の（$\mathbb{R}$ 上の）部分空間であるか否かを調べよ.

(1) $V=\mathbb{R}^3$, $\quad W=\left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 \geqq 0 \\ x_1+2x_2-3x_3 \geqq 2 \end{array} \right\}$

(2) $V=\mathbb{R}[x]_3$, $\quad W=\{\, f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid (x-2)f'(x)-f(x)=o(x) \,\}$.
但し $f'(x)$ は $f(x)$ の導函数, $o(x)=0x^3+0x^2+0x+0$ である.

$\boxed{\mathbf{5a}}$ (15 点) V が vector 空間で, W_1 と W_2 が V の部分空間であるとする. このとき, $W_1\cup W_2$ が V の部分空間であるならば, $W_1\subset W_2$ または $W_1\supset W_2$ であることを示せ.

(Hint : 背理法. $W_1\subset W_2$ でも $W_1\supset W_2$ でもないとすれば, $\boldsymbol{v}_1\in W_1$ かつ $\boldsymbol{v}_1\notin W_2$ なる $\boldsymbol{v}_1$ と, $\boldsymbol{v}_2\notin W_1$ かつ $\boldsymbol{v}_2\in W_2$ なる $\boldsymbol{v}_2$ とが存在する. $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ を調べ矛盾を導く.)

$\boxed{\mathbf{5b}}$ (15 点) V を vector 空間とする. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\in V$ について, このうちの $n-1$ 個からなるどの組も 1 次独立であつたとしても, これら n 個の vectors が 1 次独立とは限らない. これを, $\underline{V=\mathbb{R}^4,\ n=4\ \text{について}}$ 示せ.

$\boxed{6}$ (20 点) 次に挙げる V 内の vectors の組に対して次の問に答へよ.
(i) 1 次独立な最大個数 r を求めよ.
(ii) r 個の 1 次独立な vectors を前の方から順に求めよ.
(iii) 他の vectors を (ii) の vectors の 1 次結合で書き表せ.

(1) $V=\mathbb{R}^4$,

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}8\\2\\-1\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-4\end{bmatrix}$$

(2) $V=\mathbb{R}[x]_3$,

$f_1(x)=1+x-2x^2+3x^3$,
$f_2(x)=-2-x^2+x^3$,
$f_3(x)=8+2x-x^2+3x^3$,
$f_4(x)=-2-x+x^3$,
$f_5(x)=1+2x-4x^3$.

(理由もきちんと述べること.)

記　号

$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbf{K}$ … 任意に与へられた体.

以下では常に, U や V は体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする.

既習事項のまとめ

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ について $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ をこの連立 1 次方程式の拡大係数行列とよぶ.

(2) **簡約化による連立 1 次方程式の解法**. 与へられた連立 1 次方程式に対し, その拡大係数行列に対して,
(i) ある行に 0 ではない定数を掛ける;
(ii) 2 つの行を入れ替へる;
(iii) ある行**に**別の行の定数倍を加へる,
の操作（1 回にどれか 1 つ）を何回か行なつて簡約化すれば, いかなる連立 1 次方程式をも解くことができる.

(3) 集合 V と体 $\mathbf{K}$ について, 和と scalar 倍と呼ばれる演算 $V\times V\to V$, $\mathbf{K}\times V\to V$ が定義されてゐて, 和に関して群をなし, 和と scalar 倍について分配法則が成り立ち, さらに, ごく自然な付加的性質が成り立つとき, V は $\mathbf{K}$ 上の vector 空間と呼ばれる.

(4) Vector 空間 V の和に関する単位元を零 vector と呼んで $\mathbf{0}$ で表す.

(5) Vector 空間 V の部分集合 W は,
S1. $\mathbf{0}\in W$,
S2. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in W$ ならば $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in W$,
S3. $c\in\mathbf{K}$, $\boldsymbol{u}\in W$ ならば $c\boldsymbol{u}\in W$
の 3 つがすべて成り立つとき, V の部分空間と呼ばれる.

(6) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\in V$ と $c_1, \cdots, c_n\in\mathbf{K}$ について, $c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n$ の形の式を $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合といひ, $c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$ なる式が成り立つとき, これを $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次関係といふ.

(7) $0\boldsymbol{u}_1+0\boldsymbol{v}_2+\cdots+0\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$ はいつでも正しい. これを自明な 1 次関係といふ.

(8) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\in V$ が自明でない 1 次関係しか満たさないとき, これらは 1 次独立であるといはれる.
l また, 自明でない 1 次関係を満たすとき, これらは 1 次従属であるといはれる.

(9) **（問 6.3.6）** $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で書ける.

(10) **（補題 6.3.8）** V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて,
(2) $n>m$ である
ならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属である.

(11) **（系 6.3.9）** V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて,
(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立
ならば $n\leqq m$ である.

(12) V の vectors の組 S が与へられたとせよ. S から選んだ vectors の組が 1 次独立で, それ以外のいかなる S vector を付け加へても 1 次従属になるとき, その組を S の最大 1 次独立な組と称し, その組を構成する vectors の個数を S の最大 1 次独立数とよぶ.

(13) **（命題 6.4.9）** $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\in V$ を 1 次独立な vectors とし,

$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)=(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A$$

と書けてゐるとし, $A=[\,\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\,]$ とする.
このとき, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ.

(14) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\in V$ の 1 次結合の全体は V の部分空間をなす.
それを, これらの vectors で生成される部分空間と呼び, $\langle\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\rangle$ や $\mathbf{K}\boldsymbol{u}_1+\cdots+\mathbf{K}\boldsymbol{u}_n$ で表す.