

2022年度 前期 中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名			出題者
1, 両面	有	なし	80分	線形代数3 <small>火曜4時限, 教科書: Original</small>			大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退中は開始 60 分後の時点の一回限りとする。
 注意 4. 時間の許す限り検算をせよ。

1 (15点) 線形写像 $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, 但し

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & -6 & -9 \\ 2 & 6 & 0 & -3 & 4 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

について, 次を求めよ。

- (1) $\text{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\text{null}(T)$.
- (2) $\text{Im}(T)$ の 1 組の基と $\text{rank}(T)$.

2 (15点) x は不定元とする. $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -1 + x + 2x^2 + x^3, \\ f_2(x) &= -3 + 3x + 6x^2 + 3x^3, \\ f_3(x) &= 1 + 3x + x^3, \\ f_4(x) &= 2 - x - 3x^2 - x^3, \\ f_5(x) &= -4 - 6x + 4x^2, \\ f_6(x) &= 2 - 9x - 7x^2 - 5x^3 \end{aligned}$$

について, これらの vectors がなす組の中で 1 次独立な最大個数 r を求めよ. また r 個の 1 次独立な組を, 前の方を優先して選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

3 (15点) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ について答へよ.

- (1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.
- (2) $f(t) = t^5 - 2t^4 - 7t^3 - t^2 + 5t + 2$ を $\varphi_A(t)$ で割つたときの余りを求めよ.
- (3) $f(A)$ を求めよ.

- 4 (15点) 線形変換 $T : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$,
 $T(f(x)) = f''(x)(x-1)(x-2) + 2f(0)x(x+1) + f(1-x)$
について、次の3つを求めよ.
- (1) $\mathbb{R}[x]_2$ の標準基 $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列 A ,
 - (2) $(1-x+x^2, -1-5x+x^2, -3+7x+x^2) = (1, x, x^2)P$ を満たす行列 P .
 - (3) 基 $\{1-x+x^2, -1-5x+x^2, -3+7x+x^2\}$ に関する T の表現行列 B .

5 (15点) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(3, \mathbb{C})$ について答へよ.

- (1) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.
- (2) A は $(\mathbb{C}$ 上で) 対角化可能か. 不可能な場合は理由を述べ, 可能である場合は対角化せよ.
($B = P^{-1}AP$ が対角行列となる様な $P \in \text{GL}(3, \mathbb{C})$ を見い出せ.)
- (3) A^n を, その各成分を n の式で表して記せ.

6 (10点) T を V の線形変換とする. T が直交変換であるためには $\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ が全ての $\mathbf{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ.

7 (15 点) \mathbb{R}^4 内の 3 つの vectors

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

の生成する部分空間の正規直交基を 1 組求めよ. (Hint : Gram-Schmidt の正規直交化法)

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体, \mathbf{K} … 一般の体, I … 単位行列,
 $\text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ … $m \times n$ 行列, $\text{Mat}(n, \mathbf{K})$ … n 次正方行列, $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ … n 次正則行列.

練習事項のまとめ

- (1) 行列の主成分とは、各行における 0 でない最も左にある成分のことである。従って主成分が存在しない行もあり得る。
- (2) 簡約行列とは“右下りの優しい階段状”の行列であつて、主成分がすべて 1 で、主成分のある列は主成分以外はすべて 0 である様なものこと。
- (3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき、結果は一意的である。それにより、連立 1 次方程式を解くことができる。
- (4) Vector 空間 V の部分集合 X について、その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり、しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき、 r を X の 最大 1 次独立数と呼ぶ。
- (5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与える集合 B を V の基または基底といふ。 r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す。
- (6) \mathbf{K} 上の vector 空間 U から \mathbf{K} 上の vector 空間 V への写像 T は、任意の $a, b \in \mathbf{K}$ と任意の $u_1, u_2 \in U$ に対し $T(au_1 + bu_2) = aT(u_1) + bT(u_2)$ を満たすとき線形写像と呼ばれる。
- (7) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ。
- (8) \mathbf{K} 上の vector 空間 U の基 $\{u_1, \dots, u_n\}$ と vector 空間 V の基 $\{v_1, \dots, v_m\}$, および線形写像 $T : U \rightarrow V$ が与へられたとき, $(T(u_1), \dots, T(u_n)) = (v_1, \dots, v_m)A$ なる $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ を T のこれらの基に関する表現行列と呼ぶ。
- (9) 線形写像 $T : U \rightarrow V$ について
 $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0_V\}$ を T の核, $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$ を T の退化次数,
 $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$ を T の像, $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$ を T の階数といふ。
 ★ 以下 V は vector 空間, $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基, T は V の線形変換であるとする。
 ★ A は n 次正方行列とする。

- (10) $\varphi_A(t) = |I - A|$ を A の固有多項式と称する。
- (11) $Au = \lambda u$ (あるいは $T(u) = \lambda u$) となる scalar λ と $u \neq 0$ が存在するとき、それぞれを A の (あるいは T の) 固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する。
- (12) $W(\lambda, A) = \{u \in \mathbf{K}^n \mid Au = \lambda u\} (\subset \mathbf{K}^n)$ を λ に対する A の固有空間 と称する。
- (13) $W(\lambda, T) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\} (\subset V)$ を λ に対する T の固有空間 と称する。
- (14) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分。
- (15) Vector 空間 V の線形変換 T , 及び, V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の並び方に依存しない。
- (16) Cayley-Hamilton の定理: $\varphi_A(A) = O, \varphi_T(T) = O$.
- (17) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は相似であるといはれる。
- (18) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により対角化されるといふ. またこのとき, A は対角化可能であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は対角化可能であるといはれる。
- (19) 行列 $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ について, A が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda} \dim W(\lambda, A) = n$.
- (20) \mathbb{C} 上の線形変換 T について, T が対角化可能 $\iff \sum_{\lambda} \dim W(\lambda, T) = \dim V$.
 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る。
- (21) 任意の $u, v \in V$ に対し $(u, v) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の u, v について $(u, v) = (v, u)$ が成り立ち, $(u, u) = 0 \iff u = 0$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を内積空間 と称する。
- (22) 内積空間 V においては $\|u\| = (u, u)$ なる記法を用いる. これは u の norm と呼ばれる。
- (23) 内積空間において $(u, v) = 0$ となる vectors u, v は直交するといはれ $u \perp v$ と記される。
- (24) 実正方行列 P は ${}^t P P = I$ を満たすとき, 直交行列 と呼ばれる. これは $P {}^t P = I$ と同値である。
- (25) 任意の $u, v \in V$ に対して $(T(u), T(v)) = (u, v)$ となるとき T は直交変換 であるといはれる。
- (26) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値。
- (27) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である。