実施：2022 年 8 月 1 日 (月) 10:50-12:20, E-401 室

2022 年度 **前期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評 点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/2	有	なし	80 分	線形代数 4　月曜 2 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. **8a** **8b** は選択問題である. どちらか 1 問を選んで解答せよ.

1 (10 点) 実数 a, b について,

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

とおく, $P \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ と多項式 $f(t),\ g(t) \in \mathbb{R}[t]$ について, 2 つの行列

$$P^{-1}f(A)P, \quad P^{-1}g(B)P$$

は可換である. これを示せ.

2 (15 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ に対し,

$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

学籍番号

$\boxed{\mathbf{3}}$ (15 点) 方程式 $x^2 - \sqrt{3}\,xy + 5x - \sqrt{3}\,y + 6 = 0$ の標準形を求め，これが表す xy 平面上の図形の概形を図示せよ．
（x 軸，y 軸との交点の座標，漸近線なども可能な限り明示せよ．$\boxed{\mathbf{2}}$ の結果を利用してよい．）

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点) 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -10 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 11 \end{bmatrix}$ に対し，
$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め，B も記せ．

学籍番号

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) 方程式 $5x^2 + 2y^2 + 11z^2 - 20xy - 4yz - 16zx = 9$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ．また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し，その曲面の名称も記せ．（$\boxed{\mathbf{4}}$ の結果を利用してよい.）

$\boxed{\mathbf{6}}$ (10 点) A を n 次の実対称行列とせよ. $\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れておく. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ. このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{7}}$ (10 点) 次の行列 A の最小多項式 $\mu_A(t)$ を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & \\ & 5 & 1 & & & \\ & & 5 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

学籍番号

$\boxed{\mathbf{8a}}$ (10 点) 正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(m+n, \mathbf{K})$ が 2 つの正方行列 $B \in \mathrm{Mat}(m, \mathbf{K})$ と $C \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ によつて $A = \begin{bmatrix} B & \\ & C \end{bmatrix}$ と書かれるとき $\mu_A(t)$ は $\mu_B(t)$ と $\mu_C(t)$ の最小公倍多項式であることを示せ. (Hint: 任意の多項式 $f(t)$ について行列 $f(A)$ を $f(B)$ と $f(C)$ で表せ.)

$\boxed{\mathbf{8b}}$ (10 点) 次の行列 A に対して, 線形変換

$$T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x}$$

を考へる. T の固有値を求め, それぞれの固有値 λ に対する準固有空間 $\widetilde{W}(\lambda, T)$ を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -9 & 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体, I … 単位行列.

既習事項のまとめ

(1) 行列の主成分とは, 各行における 0 でない最も左にある成分のことである. 従つて主成分が存在しない行もあり得る.
(2) 簡約行列とは “右下りの優しい階段状” の行列であつて, 主成分がすべて 1 で, 主成分のある行は主成分以外はすべて 0 であるもののこと.
(3) どんな行列も基本変形（掃き出し法）により簡約行列に変形（簡約化）でき, 結果は一意的である. それにより, 連立 1 次方程式を解くことができる.
(4) Vector 空間 V の部分集合 X について, その中に r 個の vectors からなる 1 次独立な組があり, しかも X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるとき, r を X の最大 1 次独立数と呼ぶ.
(5) Vector 空間 V の最大 1 次独立数を与へる集合 B を V の基または基底といふ. r を V の次元と呼んで $\dim(V)$ または $\dim V$ と記す.
(6) Vector 空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換といふ.

★ 以下 V は vector 空間, 基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基, T, T_1, T_2 等は $V \to$ は線形変換であるとする.
★ A, B は n 次正方行列とする.

(7) $\big(T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A$ となる行列 A をこの基に関する T の表現行列と呼ぶ.
(8) 線形写像 $T : U \to V$ について
$\mathrm{Ker}(T) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V \,\}$ を T の核, $\mathrm{null}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ を T の退化次数,
$\mathrm{Im}(T) = \{\, T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U \,\}$ を T の像, $\mathrm{rank}(T) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ を T の階数といふ.
(9) $\varphi_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式と称する.
(10) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ （あるいは $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$）となる scalar λ と $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, それぞれを A の（あるいは T の）固有値, 固有値 λ に対する固有 vector と称する.
(11) $W(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \,|\, A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する A の固有空間と称する.
(12) $W(\lambda, T) = \{\boldsymbol{u} \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\}$ を λ に対する T の固有空間と称する.
(13) λ が A の固有値であるためには $\varphi_A(\lambda) = 0$ であることが必要十分.
(14) Cayley-Hamilton の定理 : $\varphi_A(A) = O$, $\varphi_T(T) = O$.
(15) Vector 空間 V 線形変換 T の V の適当な基に関する表現行列 A に対し $\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$ と定め, これを T の固有多項式と呼ぶ. $\varphi_T(t)$ は V の基の選び方に依存しない.
(16) ある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は相似であるといはれる.
(17) 正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は P により対角化されるといふ. またこのとき, A は対角化可能であるといはれる. T の表現行列 A が対角化可能であるとき, T は対角化可能であるといはれる.
(18) A が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, A) = n$. 但し, 和は A の固有値 λ のすべてに渡る.
(19) T が対角化可能 $\iff \sum_\lambda \dim W(\lambda, T) = \dim V$. 但し, 和は T の固有値 λ のすべてに渡る.
(20) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ が定められてゐて, 第 1 変数についても第 2 変数についても線形性を持ち, さらに任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ が成り立ち, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, V には内積 (,) が定められてゐるといひ, その様な V を内積空間と称する.
(21) 内積空間 V においては $\|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ なる記法を用いる. これは $\boldsymbol{u}$ の norm と呼ばれる.
(22) 内積空間において $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となる vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は直交するといはれ $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.
(23) 実正方行列 P は ${}^tPP = I$ を満たすとき, 直交行列と呼ばれる. これは $P\,{}^tP = I$ と同値である.
(24) 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ となるとき T は直交変換であるといはれる.
(25) T が直交変換であることと T の表現行列が直交行列であることは同値.
(26) 実正方行列 P が直交行列であるためには, A の列 vectors の長さが全て 1 でかつ互ひに直交することが必要十分である.
(27) ${}^tA = A$ のとき A は対称行列と称される.
(28) どんな対称行列も直交行列により対角化される.
(29) $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ が実対称行列のとき $a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ で表はされる2 次曲線は平行移動と直交変換を合せた $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{d}$ により標準形 $Ax''^2 + By''^2 = 1$ で表される曲線に合同変形される.
(30) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ が実対称行列のとき, $a_{11}\,x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}\,z^2 + 2a_{12}\,xy + 2a_{13}\,xz + 2a_{23}\,yz + c = 0$ で表はされる2 次曲面はある直交行列 P で $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ と変換することにより標準形 $Ax'^2 + By'd'^2 + Cz'^2 = 1$ で表される曲面に合同変形される.
(31) $f_1, \cdots, f_r \in \mathbb{K}[t]$ と $d = d(t) = \gcd(f_1, \cdots, f_r)$ に対して $d = g_1f_1 + \cdots + g_rf_r$ なる $g_1, \cdots, g_r \in \mathbb{K}[t]$ が存在する. この様な g_j は $r > 2$ であつても互除法を繰り返せば求められる.
(32) $\mathbb{K}[t]$ の部分集合 J について $J + J \subset J$ と $J\mathbb{K}[t] \subset J$ が成り立つとき, J は $\mathbb{K}[t]$ の ideal であるといはれる.
(33) V の部分空間 $W_1, \cdots, W_s$ について, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s \in W_s$ が一意的に存在して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ と書けるとき, V が $W_1, \cdots, W_s$ の直和であるといひ, $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ と記す.
(34) A （あるいは）T に対し $f(A) = O$（あるいは $f(T) = O$）が成り立つ多項式 $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ のうち最小次数のものを A の（あるいは T の）最小多項式と呼び $\mu_A(t)$（あるいは $\mu_T(t)$）と記す.
(35) A が T の表現行列であれば $\mu_T(t) = \mu_A(t)$. $\mu_A(t)\big|\varphi_A(t)$. $\mu_T(t)\big|\varphi_T(t)$.
(36) $\mu_A(\lambda) = 0 \iff \varphi_A(\lambda) = 0$. $\mu_T(\lambda) = 0 \iff \varphi_T(\lambda) = 0$.
(37) 線形変換 T が対角化可能 $\iff$ $\mu_T(t)$ は重根を持たない. （もちろん, 行列に関しても対応する主張が成立する. ）
(38) $T_1T_2 = T_2T_1$ のとき, T_1 の各固有空間は T_2 によりそれ自身に写され, T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.
（もちろん, 行列に関しても対応する主張が成立する. ）
(39) T_1 と T_2 がともに対角化可能で T_1 の各固有空間が T_2 によりそれ自身に写されるならば, $T_1T_2 = T_2T_1$ となる.
(40) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ で各 i について, T_i が W_i の線形変換であるとせよ. 各 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ (各 $\boldsymbol{w}_i \in W_i$) について $T(\boldsymbol{v}) = T_1(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + T_s(\boldsymbol{w}_s)$ と定められる線形変換 T を $T_1, \cdots, T_s$ の直和と称して $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$ と記す.
(41) $A^2 = A$ であるとき A を冪等行列または射影行列と呼ぶ.
(42) $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき A は冪零行列と呼ばれる.